

Analisi Matematica 2

Yoh Tanimoto

a.a. 2026–2027

2026.09.21: Presentazione del corso, serie

Dispense, esercizi: Yoh Tanimoto → Didattica → AM2.

Testo: Epsilon 2 (+ una parte di Epsilon 1), Bertsch, Dall’Aglia, Giacomelli.

Ricevimento: su appuntamento (hoyt@mat.uniroma2.it) o Teams (codice: 8t3s6ad).

Programma. Serie numeriche e di funzioni, funzioni di più variabili, integrali multipli, curve e integrali curvilinei, superfici e integrali superficiali. Applicazioni: serie di Taylor, (serie di Fourier), equazioni differenziali alle derivate parziali (equazioni di Maxwell, Navier–Stokes, Black–Scholes), ottimizzazione, elettrostatica/elettrodinamica.

In AM1, abbiamo studiato funzioni di una variabile $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Nelle applicazioni concrete, $f(x)$ può essere la posizione di una macchina al tempo x . In tal caso, $f'(x)$ rappresenta la velocità.

In AM2, studieremo funzioni (a volte chiamate “campi”) da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$. Per esempio, se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta un punto nell’aula e $T(x, y, z)$ la temperatura in quel punto, T è una funzione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Nell’elettrodinamica si considera il campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ al tempo t , $\mathbf{E}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Impareremo “derivate” ∇T , $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E}$, ...

In AM1, abbiamo studiato successioni numeriche: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Formula di Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0), \quad e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \text{(il termine rimanente con } x = 1\text{)}.$$

$$e \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Serie numeriche (Epsilon 1, Capitolo 3)

Consideriamo una successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Allora possiamo costruire una nuova successione $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$. Simbolicamente,

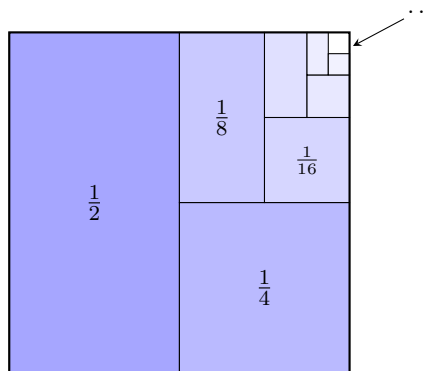
$$\sum_{k=1}^1 a_k, \quad \sum_{k=1}^2 a_k, \quad \dots \quad \sum_{k=1}^n a_k, \quad \dots$$

Esempio 1. $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, \dots, a_n = \frac{1}{2^n}$.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

In questo caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} = 1$. Geometricamente: suddividendo il quadrato unitario

in rettangoli di area $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, l’unione dei primi n rettangoli ha area $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, che tende all’area del quadrato, cioè 1.



$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3},$$

dunque $0.333 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{1}{3}$.

Definizione 2. Per una successione $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^n a_k$ è detta la *somma parziale n-esima*. La successione $\{\sum_{k=1}^n a_k\}$ si chiama la *serie* associata alla successione $\{a_n\}$. Se $\{\sum_{k=1}^n a_k\}$ converge, si dice che la serie converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è detta la *somma* della serie. Se $\sum_{k=1}^n a_k \rightarrow \pm\infty$, la serie è detta *divergente*. Altrimenti la serie è detta *irregolare*.

Osservazione 3. Si possono considerare serie che cominciano con a_m : $\sum_{k=m}^n a_k$, $m = 0$.

Serie geometrica

Sia $r \in \mathbb{R}$ e consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$.

Teorema 4. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ (1) converge se $-1 < r < 1$, (2) diverge se $r \geq 1$, (3) è irregolare se $r \leq -1$.

Dimostrazione. Per $r \neq 1$ sappiamo che $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ (si richiama la dimostrazione nella lezione successiva). (1) Se $-1 < r < 1$, allora $r^{n+1} \rightarrow 0$, dunque $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$. (2) Se $r = 1$, allora $\sum_{k=0}^n 1 = n+1 \rightarrow \infty$. Se $r > 1$, allora $r^n \rightarrow \infty$ e $\sum_{k=0}^n r^k \rightarrow \infty$. (3) Se $r \leq -1$, allora r^{n+1} è irregolare e anche $\sum_{k=0}^n r^k$. $\square$

Serie telescopiche

Consideriamo la serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

In generale, una serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ è detta *serie telescopica*. Si ha

$$\sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}.$$

Proposizione 5. Se $\{b_n\}$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Dimostrazione. $\sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1} \rightarrow b_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. $\square$

Esempio 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$. Qui la cancellazione avviene “a due passi”, dunque la Proposizione precedente non si applica direttamente: nelle somme parziali sopravvivono due termini a ciascuna estremità,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Proposizione 7. (1) Siano $\sum a_k, \sum b_k$ convergenti, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) = -\infty$. Se $\lambda > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \infty$.

Dimostrazione. (1) Per definizione,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \end{aligned}$$

Analogamente per $\sum \lambda a_k$.

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora per ogni $A < 0$ esiste N t.c. $\sum_{k=0}^n a_k > -A$ per $n \geq N$. Allora $\sum_{k=0}^n -a_k < A$. Significa che $\sum_{k=0}^{\infty} -a_k = -\infty$. $\square$

Osservazione 8.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^n a_k.$$

In particolare, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ converge.

Esempio 9. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1 + 1 = 2$.

2026.09.22: Serie a termini non negativi

Per una successione $\{a_n\}$, abbiamo considerato la serie $\{\sum_{k=0}^n a_k\}$.

Teorema 10. Se $\sum_k a_k$ converge, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $\sum_k a_k$ convergente. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per $m, n \geq N$, vale $|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k| < \varepsilon$ (il criterio di Cauchy). In particolare, se $n \geq N + 1$ allora $m = n - 1 \geq N$ e

$$|a_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right| < \varepsilon.$$

Ciò significa che $a_n \rightarrow 0$. $\square$

Osservazione 11. Anche se $a_n \rightarrow 0$, non è detto che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converga. Es. $a_n = \frac{1}{n}$.

Serie a termini non negativi

$\sum_k a_k$ si dice *serie a termini non negativi* se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 12. Siano $a_k \geq 0$. In questo caso, (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\iff \{\sum_{k=0}^n a_k\}$ è limitata superiormente; (2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\iff \{\sum_{k=0}^n a_k\}$ non è limitata superiormente.

Dimostrazione. Siccome $a_n \geq 0$, la successione $\{\sum_{k=0}^n a_k\}$ è non decrescente. Da ciò segue (1) (Oss. 2.100 di Epsilon 1). La (2) è analoga. $\square$

Teorema 13 (Criterio del confronto). Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (ossia per n abbastanza grande. Più precisamente, esiste N tale che $0 \leq a_n \leq b_n$ vale per tutti $n \geq N$). In questo caso, (1) $\sum_n b_n$ converge $\implies \sum_n a_n$ converge; (2) $\sum_n a_n$ diverge $\implies \sum_n b_n$ diverge.

Dimostrazione. Basta considerare il caso $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n , perché la convergenza di una successione (quindi una serie) riguarda solo n abbastanza grande.

(1) Segue che $\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k$. Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, le somme parziali sono limitate superiormente: $\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ per ogni n . Per il teorema precedente, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

La (2) è analoga. $\square$

Esempio 14. $\sum \frac{1}{k^2}$. Si ha che $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$, perché $k(k+1) \leq 2k^2$ per $k \in \mathbb{N}$. Per il criterio del confronto, siccome $\sum \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge (telescopica), converge pure $\sum \frac{1}{k^2}$.

Sia $\alpha > 2$. Allora vale $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, dunque per il criterio del confronto, converge pure $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. Questa è la cosiddetta *serie armonica generalizzata*, che studiamo più sistematicamente nella lezione successiva.

Teorema 15 (Confronto asintotico). Supponiamo che $0 < a_k, b_k$ definitivamente e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0$. In questo caso, $\sum_k a_k$ converge $\iff \sum_k b_k$ converge.

Dimostrazione. Siccome $\ell \neq 0$, si ha $\frac{\ell}{2} < \ell < 2\ell$, e $\frac{\ell}{2} < \frac{a_k}{b_k} < 2\ell$ definitivamente. Ossia $\frac{\ell}{2} b_k < a_k < 2\ell b_k$. Per confronto, se $\sum_k a_k$ converge, converge pure $\frac{\ell}{2} \sum_k b_k$ e viceversa. $\square$

Teorema 16 (Criterio del rapporto). Sia $a_k > 0$ definitivamente, e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$. In questo caso, (1) se $1 < \ell$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge; (2) se $\ell < 1$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Dimostrazione. (1) Sia $1 < \ell$. Prendiamo r t.c. $1 < r < \ell$. Allora definitivamente $r < \frac{a_{k+1}}{a_k}$, ovvero $ra_k < a_{k+1}$. Per il discorso di convergenza, possiamo supporre che $ra_k < a_{k+1}$ per tutti k . Dunque $r^{k-1}a_1 < r^{k-2}a_2 < \dots < a_k$. Sappiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}a_1$ diverge. Per il criterio del confronto, diverge $\sum_k a_k$.

(2) Sia $\ell < 1$. Prendiamo r t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $\frac{a_{k+1}}{a_k} < r$. Vale che $a_{k+1} < ra_k$ definitivamente. Come nel punto precedente, possiamo supporre che $a_{k+1} < ra_k$ per tutti k , dunque segue che $a_k < r^{k-1}a_1$. Sappiamo che $\sum_k r^{k-1}a_1$ converge. Per il confronto, converge pure $\sum_k a_k$. $\square$

Osservazione 17. Se $\ell = 1$, il criterio non permette di concludere nulla.

Esempio 18. Consideriamo $\sum \frac{1}{k!}$, $a_k = \frac{1}{k!}$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} \bigg/ \frac{1}{k!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0.$$

Per il criterio del rapporto, $\sum \frac{1}{k!}$ converge.

Teorema 19 (Criterio della radice). Sia $a_k \geq 0$ definitivamente, e $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k)^{\frac{1}{k}} = \ell$. In questo caso, (1) se $1 < \ell$, allora $\sum_k a_k$ diverge; (2) se $\ell < 1$, allora $\sum_k a_k$ converge.

Dimostrazione. Dimostriamo (2) ((1) è analogo). Sia $\ell < 1$. Dunque possiamo prendere r t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $(a_k)^{\frac{1}{k}} < r$, ovvero $a_k < r^k$. Sappiamo che $\sum_k r^k$ converge. Per il confronto, converge pure $\sum_k a_k$. $\square$

Esempio 20. • $\sum \frac{1}{n^{3n}}$ è convergente.

• $\sum \frac{n^{2^n}}{3^n}$ è convergente.

• $\sum \frac{n^4}{2^n}$ è convergente.

Osservazione 21. Anche qui, se $\ell = 1$, il criterio non permette di concludere nulla. Infatti, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, anche se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

2026.09.24: Il criterio integrale, esercizi

Il criterio integrale

Ricordiamo il criterio del confronto per serie a termini non negativi: siano $0 \leq a_n \leq b_n$ (definitivamente). Se $\sum_n b_n$ converge, converge pure $\sum_n a_n$. Se diverge $\sum_n a_n$, diverge pure $\sum_n b_n$.

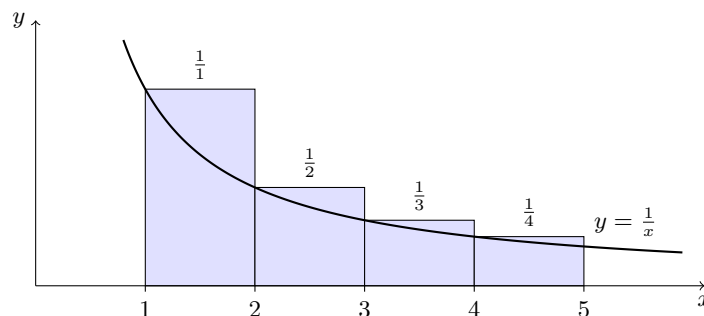
Esempio 22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Infatti,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}.$$

Prendiamo $a_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$, $b_k = \frac{1}{k}$.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1.$$

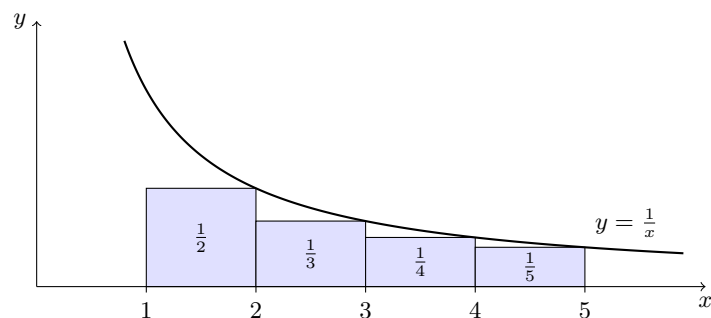
Dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \infty$. Per il confronto, diverge pure $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.



Analogamente, se $\alpha \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. Infatti, se $\alpha \leq 1$, allora $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

D'altra parte, se $\alpha > 1$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge. In questo caso, si nota che

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx.$$



Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{1}{1^\alpha} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx \\ &= 1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Per il confronto, converge pure $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$. Queste serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ sono le *serie armoniche generalizzate* già incontrate nella lezione precedente.

In generale, abbiamo il seguente criterio.

Teorema 23 (Criterio integrale). *Sia $f : (0, \infty)$ decrescente, e supponiamo che $f(x) \geq 0$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ diverge (converge) se e solo se $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge (converge).*

Con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ si ottiene il risultato su serie armoniche generalizzate.

(La seguente formula si è studiata in Analisi Matematica 1, (1.87) di Epsilon 1)

Proposizione 24. *Sia $r \neq 1$. Vale $\sum_{k=1}^n r^k = \frac{r-r^{n+1}}{1-r}$.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione.

Base dell'induzione ($n = 1$). Il membro sinistro: $\sum_{k=1}^1 r^k = r$. Il membro destro: $\frac{r-r^{1+1}}{1-r} = \frac{r(1-r)}{1-r} = r$. ✓

Passo induttivo. Supponiamo che la formula sia corretta per n . Dobbiamo dimostrare $\sum_{k=1}^{n+1} r^k = \frac{r-r^{(n+1)+1}}{1-r}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} r^k &= \sum_{k=1}^n r^k + r^{n+1} = \frac{r-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\ &= \frac{r-r^{n+1} + r^{n+1}(1-r)}{1-r} = \frac{r-r^{n+2}}{1-r}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Per induzione, la formula è corretta per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Esercizi

Calcolare le somme.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{84}{\pi^{2k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)},$$

Determinare se la serie converge o diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + 3^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k + 1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}.$$

Determinare per quali $x > 0$ converge la serie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

2026.09.28: Serie a termini di segno variabile

Definizione 25. Sia $\{a_n\}$ una successione, $a_n \in \mathbb{R}$. Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente se converge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

In confronto, la convergenza della serie $\sum_k a_k$ si dice *convergenza semplice*.

Teorema 26. Se $\sum_k a_k$ converge assolutamente, allora converge pure $\sum_k a_k$ (nel senso usuale). Inoltre, vale $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Dimostrazione. Consideriamo la serie $\sum(|a_k| - a_k)$, a termini non negativi. Si ha che $|a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, e $\sum 2|a_k| = 2\sum |a_k|$; quella serie converge per il criterio del confronto e per ipotesi. Siccome convergono sia $\sum(|a_k| - a_k)$ sia $\sum |a_k|$, converge anche $\sum a_k = \sum(|a_k| - (|a_k| - a_k))$. Vale per ogni n che $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$ per la disuguaglianza triangolare. Entrambe le serie convergono, e dunque vale $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. $\square$

Esempio 27. $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge perché $|\frac{\cos k}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, dunque converge $\sum |\frac{\cos k}{k^2}|$ per il confronto, e $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge per il teorema.

Teorema 28. Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ (oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$). Se $\ell < 1$, allora $\sum_k a_k$ converge assolutamente. Se $1 < \ell$, la serie non converge.

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ e $\ell < 1$. Consideriamo la serie $\sum_k |a_k|$, a termini non negativi. Per ipotesi e per il criterio del rapporto, la serie $\sum_k |a_k|$ converge. Ciò significa che la serie $\sum_k a_k$ converge assolutamente. Il caso $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$ è analogo. Se $\ell > 1$, prendiamo r t.c. $1 < r < \ell$: definitivamente $|a_{k+1}| > r|a_k|$, dunque $|a_k| \rightarrow \infty$ e in particolare $a_k \not\rightarrow 0$. Per il primo teorema del 09.22, la serie $\sum_k a_k$ non converge. $\square$

Esempio 29. • Sia $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. La serie converge assolutamente. Infatti, poniamo $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque, per il teorema precedente con $\ell = 0 < 1$, la serie converge assolutamente.

- Sia $A > 0$. Consideriamo $\sum_k \left(\frac{-2k}{1+A} \right)^k$. Poniamo $a_n = \left(\frac{-2n}{1+An} \right)^n$. Per il criterio della radice,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+An} = \frac{2}{A}.$$

Dunque se $A > 2$, la serie converge assolutamente. Se $A < 2$, la serie non converge. Se $A = 2$,

$$\left(\frac{-2k}{1+2k} \right)^k = 1 / \left(\frac{1+2k}{-2k} \right)^k = (-1)^k \cdot 1 / \left(1 + \frac{1}{2k} \right)^k$$

e $(1 + \frac{1}{2k})^k \rightarrow \sqrt{e}$. In particolare, $a_n \not\rightarrow 0$, e dunque la serie non converge.

Serie a termini di segno alterno

Siano $0 \leq a_k$ e consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Esempio 30. $\sum (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

Teorema 31 (Criterio di Leibniz). Siano $0 \leq a_k$, e supponiamo che (i) $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$; (ii) $a_k \geq a_{k+1}$ per $k \in \mathbb{N}$ (non crescente). Allora $\sum_k (-1)^k a_k$ converge.

Dimostrazione. Poniamo $\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = S_n$. Osserviamo che:

(1) La sottosuccessione $\{S_{2n}\}$ è non crescente. Infatti,

$$S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - a_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}),$$

e siccome $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, segue che $S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$.

(2) $\{S_{2n+1}\}$ è non decrescente. Infatti,

$$S_{2(n+1)+1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k + a_{2n+2} - a_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3},$$

e siccome $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, segue che $S_{2(n+1)+1} \geq S_{2n+1}$.

(3) Vale $S_{2n} \geq S_{2n+1}$. Infatti, $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ e $a_{2n+1} \geq 0$.

(4) $\{S_{2n}\}$ è limitata inferiormente (da S_1). Infatti, $S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_{2n-1} \geq \dots \geq S_1$. $\{S_{2n+1}\}$ è limitata superiormente (da S_2). Infatti, $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \dots \leq S_2$. Siano $S_{2n} \rightarrow S'$, $S_{2n+1} \rightarrow S''$.

(5) $S' = S''$. Infatti,

$$S' - S'' = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

per ipotesi.

Dunque tutta la successione $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ converge a $S' = S''$. □

Esempio 32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge per il criterio di Leibniz. Infatti, basta verificare che (i) $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, (ii) $\frac{1}{k}$ è decrescente.

Notiamo che, anche se $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge semplicemente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. La convergenza di $\sum_k a_k$ non implica la convergenza assoluta (di $\sum_k |a_k|$).

Osservazione 33. È sufficiente che le condizioni (i) e (ii) valgano definitivamente: cambiare un numero finito di termini non altera il carattere della serie.

Esempio 34. La condizione (ii) può essere verificata usando la derivata. Consideriamo, per esempio, $\sum_k (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$ e poniamo $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$. Allora

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x(x-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+8x+1}{(x^2+1)^2},$$

che è negativa per $x > 4 + \sqrt{17}$. Dunque $\frac{k-4}{k^2+1}$ è non crescente definitivamente, ed è chiaro che $\frac{k-4}{k^2+1} \rightarrow 0$. Si noti che $\frac{k-4}{k^2+1} < 0$ per $k = 1, 2, 3$: anche l'ipotesi $a_k \geq 0$ vale solo definitivamente, ed è per questo che serve l'osservazione precedente. Dunque $\sum_k (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$ converge per il criterio di Leibniz.

2026.09.29: Serie di potenze

Consideriamo serie della seguente forma, detta *serie di potenze*. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ una successione,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

per vari $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 35. • $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$, $x_0 = 3$, $a_k = \frac{1}{k+1}$.

• $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$.

Il primo esempio converge se $|x - 3| < 1$, per il confronto con la serie geometrica, $\left| \frac{(x-3)^k}{k+1} \right| \leq |x - 3|^k$, ma se $|x - 3| > 1$, la serie non converge perché $\left| \frac{(x-3)^k}{k+1} \right| \rightarrow \infty$.

Il secondo esempio converge per tutti $x \in \mathbb{R}$, per il criterio del rapporto.

Teorema 36. Una serie di potenze (i) o converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (in tal caso poniamo $r = +\infty$), (ii) o esiste $r \in [0, \infty)$ t.c. la serie converge assolutamente se $|x - x_0| < r$ e non converge se $|x - x_0| > r$.

Dimostrazione. Supponiamo che la serie converga per alcuni x e non per altri. Sostituendo $x - x_0$ con x , basta considerare la serie $\sum a_k x^k$. Supponiamo che la serie converga per un $x_1 \in \mathbb{R}$. Allora la serie converge anche per x t.c. $|x| < |x_1|$. Infatti, siccome la serie converge per x_1 , $a_k (x_1)^k \rightarrow 0$. In particolare, $\{a_k x_1^k\}$ è limitata, da $C > 0$. Ora sia $|x| < |x_1|$. Abbiamo allora

$$|a_k x^k| = |a_k x_1^k| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_1|} \right)^k \leq C \left(\frac{|x|}{|x_1|} \right)^k$$

e $\sum_k C \left(\frac{|x|}{|x_1|} \right)^k$ è una serie geometrica convergente, perché $\frac{|x|}{|x_1|} < 1$. Dunque $\sum_k |a_k x^k|$ converge per il criterio del confronto, ossia $\sum_k a_k x^k$ converge assolutamente.

D'altra parte, sia $x_2 \in \mathbb{R}$ per cui la serie non converge. Se $|x| > |x_2|$, la serie $\sum a_k x^k$ non converge; infatti, se $\sum a_k x^k$ dovesse convergere, per l'argomento precedente, dovrebbe convergere pure $\sum a_k x_2^k$, contraddizione.

Sia $r = \sup\{s \in \mathbb{R} : \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } |x| < s, \sum a_k x^k \text{ converge}\}$. L'insieme non è vuoto (c'è 0) ed è limitato superiormente (da $|x_2|$). Ripetendo gli argomenti analoghi, si dimostra che la serie converge assolutamente se $|x| < r$ e non converge se $|x| > r$ (si prende $|x| < |x_1| < r$). $\square$

r è detto *raggio di convergenza*.

Esempio 37. Per $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$, il raggio r di convergenza è 1.

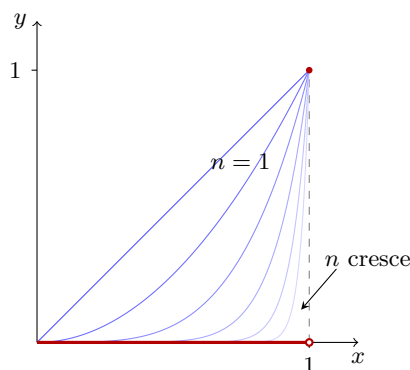
Per $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, il raggio r di convergenza è ∞ .

Notiamo che, quando una serie di potenze converge per x tale che $|x - x_0| < r$, si può definire una funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Che proprietà ha f ?

Successioni e serie di funzioni (Epsilon 2, Sezioni 8.3 in poi)

Consideriamo, per $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ su $[0, \infty)$. Ossia, per ogni $x \in [0, \infty)$, consideriamo la successione numerica $\{x^n\}$.

- Se $x \in [0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.
- Se $x = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$.
- Se $x > 1$, $x^n \rightarrow \infty$.



Come in questo esempio, una successione di funzioni può convergere in alcuni punti e non convergere in altri. Anche sull'insieme $[0, 1]$ della convergenza, il limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è discontinuo. Quando il limite è “buono”?

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni sul dominio comune X e f una funzione su X , $E \subset X$.

Definizione 38. Si dice che $\{f_n\}$ converge puntualmente in E a f se per ogni $x \in E$ $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Ossia, per ogni x , $\varepsilon > 0$, esiste $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N_{x,\varepsilon}$.

Definizione 39. Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente in E a f se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $x \in E$ e $n \geq N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Esempio 40. • Sia $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f(x) = 0$. Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Prendiamo N tale che $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Allora, se $n \geq N$, si ha che, siccome $|\sin x| \leq 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\sin x| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ per tutti $x \in \mathbb{R}$.

• Sia $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. $\{f_n\}$ converge puntualmente a f , ma non uniformemente. Infatti, fissiamo $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, preso $x = (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} \in [0, 1)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = x^n = 1 - \varepsilon > \varepsilon$: nessun N_ε può funzionare per ogni $x \in [0, 1]$.

2026.10.01: Convergenza uniforme

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 41. Supponiamo che $\{f_n\}$ siano continue su X e converga a f uniformemente. Allora f è continua su X .

Dimostrazione. Siano $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Siccome $\{f_n\}$ converge a f uniformemente, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. per tutti $x \in X$, $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Siccome f_{N+1} è continua, esiste $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ora, con lo stesso δ , se $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0) + f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

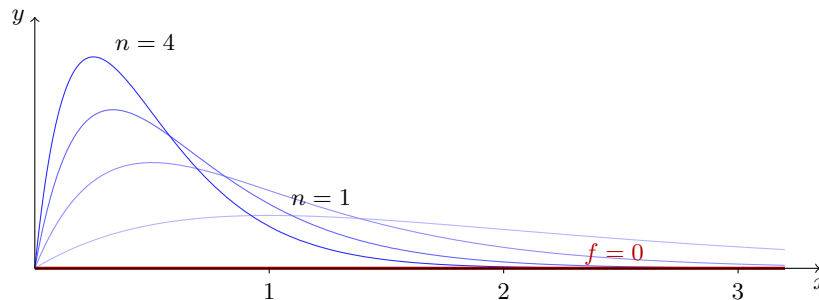
□

Esempio 42 ((Non) esempi). • $\{x^n\}$, $X = [0, 1]$, converge a $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ puntualmente ma non uniformemente. Infatti, anche se $f_n(x) = x^n$ sono continue, il limite $f(x)$ non è continua.

- $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Per ogni $x > 0$ si ha $f_n(x) \rightarrow 0$, e $f_n(0) = 0$: dunque $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f = 0$. La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Questo dimostra che, per $\varepsilon = 1$ non esiste N tale che $|f_n(x) - f(x)| < 1$ per tutti $n \geq N$ e x .



Per questa successione, vale

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \left[-n x e^{-nx} \right]_0^1 - \int_0^1 (-n e^{-nx}) dx = -n e^{-n} + \left[-e^{-nx} \right]_0^1 \\ &= 1 - (n+1)e^{-n} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

D'altra parte, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$.

Teorema 43. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}$, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\{f_n\}$ converga a f uniformemente. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c., per tutti $x \in [a, b]$ e $n \geq N$, vale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora, con lo stesso N , per $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Questo dimostra che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. □

Serie di funzioni

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Come serie numeriche, si può considerare la successione $\{\sum_{k=1}^n f_k\}$ delle funzioni, che si chiama *serie (di funzioni)*. Si definisce convergenza puntuale/uniforme per la serie come la convergenza di $\{\sum_{k=0}^n f_k\}$.

Teorema 44. Siano $\{f_k\}$ funzioni continue su $[a, b]$. Supponiamo che $\{\sum f_k\}$ converga uniformemente su $[a, b]$. Allora $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ è continua su X e

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Esercizi

- Studiare la convergenza.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \quad (\text{confronto con l'integrale}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \quad (\text{rapporto}).$$

- Studiare la convergenza semplice/assoluta.

$$\sum (-1)^k \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \right).$$

- Dire per quali valori di x la serie converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^x + 1}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2 + 3k + 1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k.$$

2026.10.05: Serie di Taylor

Per una successione $\{a_k\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie di potenze è $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Abbiamo definito il raggio r . Possiamo calcolare r come segue:

Teorema 45. *Supponiamo che $a_k \neq 0$ definitivamente e che il limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ esista (anche come ∞). Allora $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$.*

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto a $\sum a_k(x - x_0)^k$: si calcola

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}|}{|a_k(x - x_0)^k|} = |x - x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

Se il limite è minore di 1, ossia se $|x - x_0| < \lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, la serie converge assolutamente, e se $|x - x_0| > \lim_k \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, la serie non converge. Siccome il raggio di convergenza con questa proprietà è unico (teorema del 09.29), si ha $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$. $\square$

Teorema 46. *Sia $\sum a_k(x - x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza r e sia $0 < \rho < r$. Allora la serie converge uniformemente e assolutamente in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\sum |a_k| \rho^k$ converge. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste N t.c. per $n \geq N$ vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho^k - \sum_{k=0}^n |a_k| \rho^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \varepsilon.$$

Sia $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, allora $|x - x_0| \leq \rho$, e sappiamo che $\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ converge a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.

Sia $\varepsilon > 0$, e prendiamo N come sopra. Per ogni $n \geq N$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siccome N non dipende da x , la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ converge uniformemente in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. La convergenza assoluta in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ è già nota, perché $\rho < r$ (teorema del 09.29). $\square$

Osservazione 47. La tecnica di maggiorare una serie di funzioni con una serie numerica convergente si chiama *criterio di Weierstrass*.

Per il teorema del 10.01, possiamo integrare le serie termine per termine. Poniamo $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Teorema 48. Se $|x - x_0| < r$, allora $\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$.

Dimostrazione. Poniamo $\rho = |x - x_0|$. Se $\rho = 0$, il teorema è banale, dunque possiamo supporre che $0 < \rho < r$. La serie converge uniformemente in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ per il teorema precedente. Consideriamo il caso $x - x_0 \geq 0$ (quello con $x < x_0$ è analogo): allora $[x_0, x] = [x_0, x_0 + \rho]$, dunque, per la convergenza uniforme,

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_k (t - x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left[(t - x_0)^{k+1} \right]_{x_0}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}. \quad \square$$

Notiamo che la serie derivata termine per termine

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$$

ha lo stesso raggio di convergenza: infatti, per il primo teorema di oggi, posto $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = r$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1) a_{n+1}|}{|(n+2) a_{n+2}|} = 1 \cdot r = r.$$

Poniamo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$. Per il teorema precedente, per $|x - x_0| < r$,

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) a_{k+1}}{k+1} (x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = S(x) - a_0.$$

Siccome f è continua (perché è il limite uniforme di una successione di funzioni continue), per il teorema fondamentale del calcolo

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left(a_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k.$$

Ossia, la serie di potenze si può derivare termine per termine.

Sia f una funzione definita in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ e derivabile infinite volte. Allora possiamo considerare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

Teorema 49. Supponiamo che esista $A > 0$ t.c. $|f^{(k)}(x)| < A^k$ per $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Allora si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

Dimostrazione. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange (Epsilon 1, par. 6.19) esiste c tra x_0 e x t.c.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Per ipotesi,

$$\left| f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{(A|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

ossia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$. $\square$

Esempio 50. Sia $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$. Allora $f^{(k)}(x) = e^x$ e, per $x \in (-\rho, \rho)$, $|f^{(k)}(x)| < e^\rho \leq (e^\rho)^k$ per ogni $k \geq 1$: l'ipotesi vale con $A = e^\rho$. Dunque

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \quad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (|x| < 1),$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (|x| \leq 1),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (|x| < 1),$$

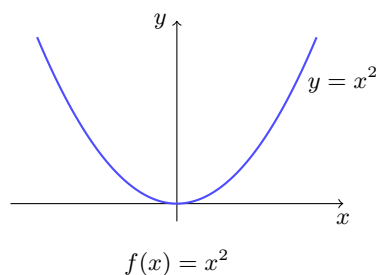
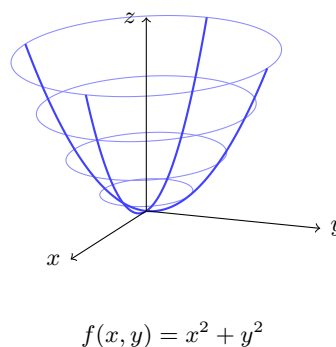
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

2026.10.06: Funzioni di più variabili

Funzioni di più variabili (Capitolo 1 di Epsilon 2)

In AM1, si è studiata la teoria delle funzioni di una variabile $f(x)$. In AM2, si considerano funzioni di più variabili: $f(x, y)$ (quando ci sono 2 variabili), $f(x, y, z)$ (3 variabili), $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (n variabili). (x, y) si può considerare come un punto in $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Dunque $f(x, y)$ è una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. (Più avanti studiamo funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.)

Ricordiamoci che il grafico di una funzione di una variabile $f(x)$ col dominio A è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$. Per una funzione di due variabili col dominio $A \subset \mathbb{R}^2$, il grafico è $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$. Per esempio, il grafico di $z = x^2 + y^2$ è un paraboloide.



In generale, non è possibile disegnare il grafico di una funzione di più variabili sul piano. Ciò nonostante possiamo fare il calcolo (derivate, integrale) e studiare le proprietà, generalizzando le idee di AM1.

Gli insiemi di livello

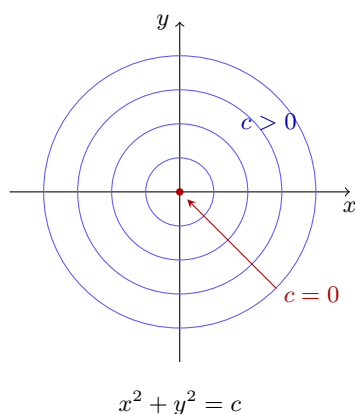
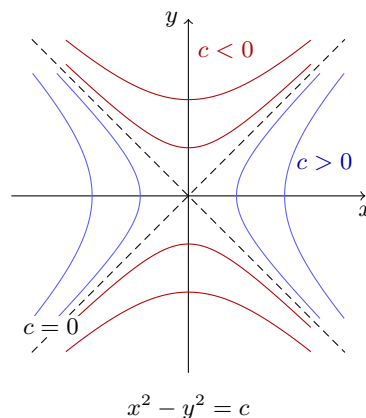
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f una funzione definita in Ω (Ω è detto *dominio*), $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $c \in \mathbb{R}$. L'insieme $\{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ è detto l'*insieme di livello* c di f .

Esempio 51. • Siano $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $c \in \mathbb{R}$.

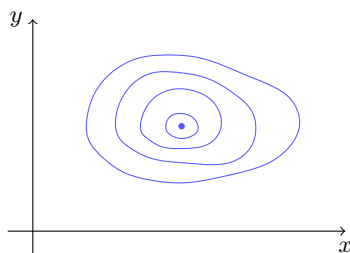
- Se $c > 0$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$ è una circonferenza di raggio $\sqrt{c}$.
- $c = 0$: $\{x^2 + y^2 = 0\}$ è $\{(0, 0)\}$.
- $c < 0$: $\{x^2 + y^2 = c\}$ è vuoto.

• Siano $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Sia $c \in \mathbb{R}$.

- Se $c > 0$, $\{(x, y) : x^2 - y^2 = c\}$ sono due iperboli $x = \pm\sqrt{y^2 + c}$.
- $c = 0$: $\{x^2 - y^2 = 0\}$ sono due rette $x = \pm y$.
- $c < 0$: $\{x^2 - y^2 = c\}$ sono due iperboli $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$.



Se $f(x, y)$ rappresenta la pressione atmosferica, gli insiemi di livello sono noti come *isobare*. Se $f(x, y)$ rappresenta l'altezza dal mare, si chiamano *isoipse*.



$\mathbb{R}^n$ e la sua topologia

Si scrive $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, ecc. $\mathbb{R}^n$ si può considerare come uno spazio vettoriale. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, si definiscono $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Si può prendere la base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-esimo}}{1}, 0, \dots, 0)$. Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j$.

Siano $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Il loro *prodotto scalare* è

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{j=1}^n v_j w_j \quad (= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle).$$

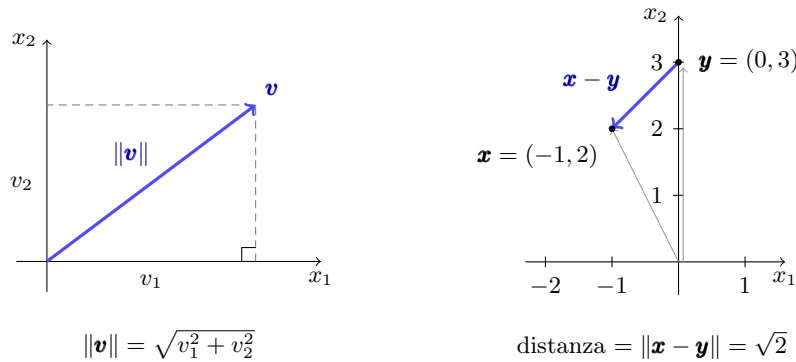
Gode delle seguenti proprietà:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$,
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,
- $(a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, $= 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Si chiama *norma* (o *lunghezza*) di $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ il numero

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \left(\sum_{j=1}^n v_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se $n = 2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ è infatti la lunghezza del vettore $\mathbf{v}$, per il teorema di Pitagora. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La distanza tra due punti è definita come $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Si nota che $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è il vettore che va da $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$.



Esempio 52. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (-1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, 3)$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$. In $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{y} = (0, 3, -1)$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{6}$.

Lemma 53 (Cauchy-Schwarz). Per $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, vale $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, entrambi i membri sono nulli e non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ossia $\|\mathbf{y}\|^2 > 0$, e sia $t \in \mathbb{R}$. Vale

$$0 \leq \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + t\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + t^2\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + t^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Il membro destro è un trinomio di secondo grado in t che non è mai negativo, dunque il suo discriminante è ≤ 0 :

$$4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \leq 0,$$

ossia $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Estrahendo la radice si ottiene $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. □

Lemma 54 (Disuguaglianza triangolare). $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Dimostrazione. Per il lemma precedente, $\pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, dunque

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \pm 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Prendendo la radice si conclude $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. □

Per questo $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ si può usare come distanza in $\mathbb{R}^n$.

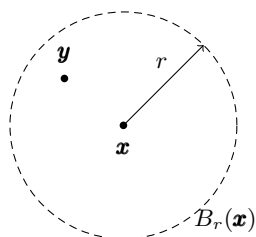
2026.10.08: Topologia in $\mathbb{R}^n$

Insiemi aperti e chiusi

Siano $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si chiama *intorno sferico* di $\mathbf{x}$ di raggio r l'insieme

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$. $\mathbf{x}$ è detto *punto interno* di Ω se esiste $r > 0$ t.c. $B_r(\mathbf{x}) \subset \Omega$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice *insieme aperto* se ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ è un punto interno.

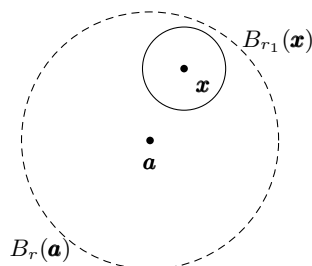


Lemma 55. Siano $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Allora $B_r(\mathbf{a})$ è aperto.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$. Per definizione, $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$. Prendiamo $0 < r_1 < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$. Allora $B_{r_1}(\mathbf{x}) \subset B_r(\mathbf{a})$. Infatti, per ogni $\mathbf{y} \in B_{r_1}(\mathbf{x})$, vale che $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r_1$. Allora segue che

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r_1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r.$$

Dunque $\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{a})$. Questo dimostra che ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ è interno. □



Definizione 56. Sia $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Ossia per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si dice che $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ converge a $\mathbf{a}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k \geq K$, $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$. Si scrive $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a}$, oppure $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{a}$ per $k \rightarrow \infty$.

Equivalentemente, $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ converge a $\mathbf{a}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}^{(k)} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$ definitivamente, se e solo se $\{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\|\}$ tende a 0 come successione numerica.

Ricordiamo che $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. $\|\mathbf{x}^{(k)}\|^2 \rightarrow 0$ (per $k \rightarrow \infty$) se e solo se per ogni $j = 1, \dots, n$ vale che $x_j^{(k)} \rightarrow 0$ (per $k \rightarrow \infty$). (Infatti, $|x_j^{(k)}|^2 \leq \|\mathbf{x}^{(k)}\|^2$; viceversa, il limite della somma è la somma del limite.)

Applicando questo alla successione $\{\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\}$, si ottiene che $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se per ogni $j = 1, \dots, n$, $x_j^{(k)}$ converge a a_j per $k \rightarrow \infty$.

Definizione 57. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω è detto *chiuso* se, per tutte le successioni $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \Omega$ convergenti a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, vale che $\mathbf{a} \in \Omega$.

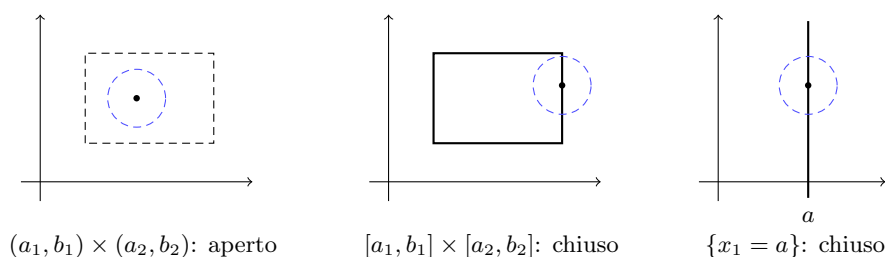
Teorema 58. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω è aperto se e solo se $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che Ω sia aperto e dimostriamo che Ω^c è chiuso, per assurdo. Dunque supponiamo che esista $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \Omega^c$, $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{a} \notin \Omega^c$, ossia $\mathbf{a} \in \Omega$. Siccome Ω è aperto, esiste $r > 0$ t.c. $B_r(\mathbf{a}) \subset \Omega$. Esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k \geq K$ vale $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| < r$. Ciò significa che $\mathbf{x}^{(k)} \in B_r(\mathbf{a}) \subset \Omega$ per $k \geq K$, contraddizione.

D'altra parte, supponiamo che Ω^c sia chiuso e dimostriamo che Ω è aperto, per assurdo. Dunque supponiamo che esista $\mathbf{a} \in \Omega$ t.c. per ogni $r > 0$ non vale che $B_r(\mathbf{a}) \subset \Omega$, ossia $B_r(\mathbf{a}) \setminus \Omega$ non è vuoto. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si può prendere un punto $\mathbf{x}^{(k)} \in B_{\frac{1}{k}}(\mathbf{a}) \setminus \Omega \subset \Omega^c$. Siccome $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{a}\| < \frac{1}{k}$, si ha che $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{a}$, $k \rightarrow \infty$. D'altra parte, siccome $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \Omega^c$, segue che $\mathbf{a} \in \Omega^c$ per l'ipotesi. Contraddizione. $\square$

Esempio 59. In $\mathbb{R}^2$, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1 \text{ e } a_2 < x_2 < b_2\}$ è aperto. $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ e } a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$ è chiuso. $(a_1, b_1) \times [a_2, b_2]$ non è né aperto né chiuso.

In $\mathbb{R}^2$, $\{(x_1, x_2) : x_1 = a\}$ è chiuso.



Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice *punto di accumulazione* di Ω se esiste $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \Omega$ con $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}$ t.c. $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$ (per $k \rightarrow \infty$). Non necessariamente $\mathbf{x} \in \Omega$: per esempio $(0, 0)$ per $(0, 1) \times (0, 1)$.

Limiti di funzioni e continuità

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione di Ω , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 60. Si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il *limite* di f per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x}_0$ se per ogni successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subset \Omega$ t.c. $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$, vale che $f(\mathbf{x}^{(k)}) \rightarrow \ell$ per $k \rightarrow \infty$. (Si considerano anche i casi in cui $\ell = \pm\infty$ con una definizione analoga.) Si scrive $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$.

Esempio 61. • $f(x, y) = x^2y$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. Si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2y = 0$. Infatti, sia $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\}$ t.c. $(x^{(k)}, y^{(k)}) \rightarrow (0, 0)$. Allora $x^{(k)} \rightarrow 0$, $y^{(k)} \rightarrow 0$, dunque $(x^{(k)})^2 y^{(k)} \rightarrow 0$.

• $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Infatti, $(\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ e $f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \rightarrow 0$, mentre $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$,

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Definizione 62. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua* in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se, o $\mathbf{x}_0$ non è un punto di accumulazione, o $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

2026.10.12: Limiti e continuità

Ricordiamo, per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di Ω (esiste $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in Ω con $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}_0$ t.c. $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$, $k \rightarrow \infty$), siano $\ell \in \mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ significa che, per ogni $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in Ω con $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$, vale che $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = \ell$.

Molte proprietà del limite seguono da quelle delle successioni numeriche. Supponiamo che $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = m$. Allora, prendendo $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ come sopra,

$$\bullet \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}^{(k)}) + g(\mathbf{x}^{(k)})) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) + \lim_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}^{(k)}) = \ell + m = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}).$$

Analogamente,

$$\bullet \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \right) \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \right),$$

$$\bullet \text{ se } m \neq 0, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \right) / \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \right).$$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se $\mathbf{x}_0$ non è un punto di accumulazione, si dice *punto isolato*. Allora esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega = \{\mathbf{x}_0\}$. Ricordiamo che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice continua in $\mathbf{x}_0$ se, o $\mathbf{x}_0$ è isolato o $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 63. f è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$ vale che $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia f continua in $\mathbf{x}_0$. Ci sono due casi: se $\mathbf{x}_0$ è isolato, allora sia $\delta > 0$ come sopra. Per $\varepsilon > 0$, usiamo quel δ ; allora $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$ significa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, dunque $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = 0 < \varepsilon$.

Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione. Per assurdo, supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ t.c. per ogni $\delta > 0$ esiste $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \geq \varepsilon$. Allora per $k \in \mathbb{N}$ prendiamo un tale $\mathbf{x}^{(k)} \in B_{\frac{1}{k}}(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$; si ha $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}_0$, perché $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}_0)| \geq \varepsilon > 0$. Allora $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$ (per $k \rightarrow \infty$), però $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}_0)| \geq \varepsilon$, il che contraddice l'ipotesi.

Viceversa. Se $\mathbf{x}_0$ è isolato, f è continua per definizione.

Sia $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in Ω , $\mathbf{x}^{(k)} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$, e sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$. Siccome $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}_0$, esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq K$ vale $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, ossia $\mathbf{x}^{(k)} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Omega$. Dunque $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $k \geq K$, cioè $f(\mathbf{x}^{(k)}) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$. Siccome $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ è arbitraria, questo dimostra la continuità di f in $\mathbf{x}_0$. $\square$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Scriviamo

$$\text{im } f = f(\Omega) := \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\} = \{z \in \mathbb{R} : \text{esiste } \mathbf{x} \in \Omega \text{ t.c. } z = f(\mathbf{x})\}.$$

Se abbiamo $D \subset \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$, allora possiamo definire la *funzione composta* $g \circ f(\mathbf{x}) := g(f(\mathbf{x}))$, definita su Ω .

Teorema 64. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Supponiamo che f sia continua in $\mathbf{x}_0$ e g sia continua in $f(\mathbf{x}_0)$. Allora $g \circ f$ è continua in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per continuità di g in $f(\mathbf{x}_0)$, esiste $\delta' > 0$ t.c. per ogni $z \in D$, $|z - f(\mathbf{x}_0)| < \delta'$, vale che $|g(z) - g(f(\mathbf{x}_0))| < \varepsilon$. Per continuità di f in $\mathbf{x}_0$ (rispetto a $\delta' > 0$), esiste $\delta > 0$ t.c. per $\mathbf{x} \in \Omega$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, vale che $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \delta'$. Ponendo $z = f(\mathbf{x})$, concludiamo che, per tale $\mathbf{x}$, vale $|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x}_0))| < \varepsilon$. $\square$

Definizione 65. Si dice che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in Ω) quando f è continua in ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

Corollario 66. Siano $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$, f, g continue. Allora $g \circ f$ è continua.

Esercizi

- Studiare il dominio naturale e il limite.

$$- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} \quad (\text{definito per } x+y \neq 0)$$

$$- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad (x - y \neq 0)$$

$$- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + |y|}$$

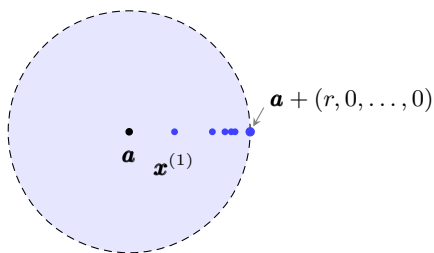
- L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}$ è aperto / chiuso / nessuno.
- Il dominio della funzione $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{y-1}$ è aperto / chiuso / nessuno.

2026.10.13: Compattezza, curve

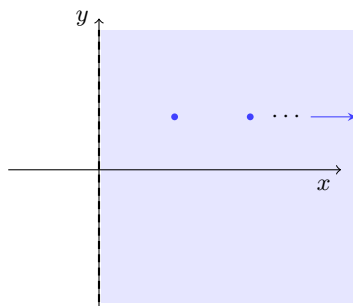
Definizione 67. $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice *compatto* (sequenzialmente) se ogni successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in K ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento in K . $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste $r > 0$ t.c. $K \subset B_r(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Esempio 68 (Non esempi). $B_r(\mathbf{a})$ non è compatto. Infatti, si può prendere $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{a} + (r - \frac{1}{k}, 0, \dots, 0)$, che converge a $\mathbf{a} + (r, 0, \dots, 0) \notin B_r(\mathbf{a})$. Ogni sottosuccessione converge allo stesso punto, che non appartiene a $B_r(\mathbf{a})$.

$\{(x, y) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ non è limitato, dunque non è compatto. Possiamo prendere $\mathbf{x}^{(k)} = (k, 0)$, che non converge.



$B_r(\mathbf{a})$: non compatta



$\{(x, y) : x > 0\}$: non limitato

Teorema 69 (Bolzano–Weierstrass). $K \subset \mathbb{R}^n$ è *compatto* se e solo se è *limitato* e *chiuso*.

Dimostrazione. Se K non è limitato, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $K \not\subset B_k(\mathbf{0})$, dunque si può prendere $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in K , $\|\mathbf{x}^{(k)}\| \rightarrow \infty$, dunque ogni sottosuccessione non può convergere e K non è compatto. Se K non è chiuso, allora esiste $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ in K , convergente ma $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} \notin K$ e ogni sottosuccessione converge ad un punto che non appartiene a K , dunque K non è compatto.

Viceversa, sia K chiuso e limitato. Sia $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ una successione in K , $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ per $k \in \mathbb{N}$. La successione reale $\{x_1^{(k)}\}$ è limitata, dunque per il teorema di Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}$ (caso $n = 1$, visto in AM1) ammette una sottosuccessione $\{x_1^{(k_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente. Applicando lo stesso risultato a $\{x_2^{(k_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, si estrae da questa un'ulteriore sottosuccessione per cui converge anche la seconda componente; la prima continua a convergere, perché ogni sottosuccessione di una successione convergente converge allo stesso limite. Ripetendo il procedimento n volte, si ottiene una sottosuccessione $\{\mathbf{x}^{(k_\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ di cui tutte le componenti sono convergenti, dunque convergente, ad $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Siccome K è chiuso, $\mathbf{x} \in K$. Così K è compatto. $\square$

Definizione 70. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ si dice punto di *massimo* (risp. *minimo*) *globale* (assoluto) se per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ vale che $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (risp. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$). $f(\mathbf{x}_0)$ (il valore) si dice *massimo* (risp. *minimo*) *globale* (assoluto) di f .

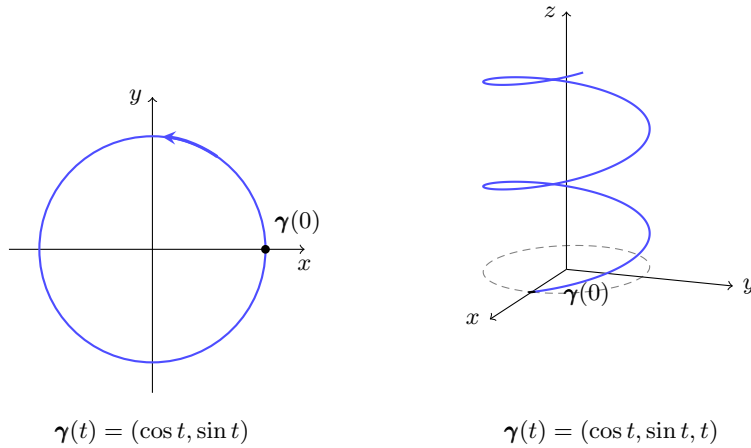
Teorema 71 (Weierstrass). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette un massimo globale e un minimo globale.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso del massimo; quello del minimo è analogo. In $f(K)$ si prende $\{y_k\}$ t.c. $y_k \rightarrow \sup f(K)$: una tale successione esiste per definizione di estremo superiore, anche nel caso $\sup f(K) = +\infty$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si prende $\mathbf{x}^{(k)} \in K$ t.c. $f(\mathbf{x}^{(k)}) = y_k$. Per la compattezza, esiste una sottosuccessione $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}$ convergente, a $\mathbf{x}_0 \in K$. Per la continuità di f , $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(k_j)}) = f(\mathbf{x}_0) = \lim_k y_k = \sup f(K)$. Dunque $f(\mathbf{x}_0) = \sup f(K)$. In particolare $\sup f(K)$ è finito, perché è il valore $f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}$, e f assume il massimo in $\mathbf{x}_0$. $\square$

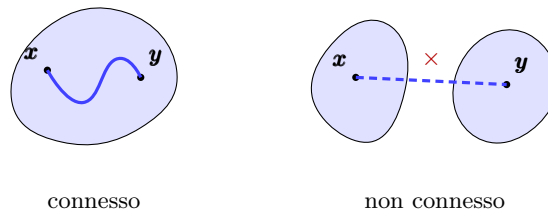
Curve in $\mathbb{R}^n$

Finora abbiamo considerato funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Si possono considerare funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $I = (a, b)$, $[a, b]$ o simile. Una funzione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si può scrivere come $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ si *definisce* la continuità per componenti: γ si dice continua se tutte le $\gamma_j: I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, sono continue. Per il risultato del 10.08 sulla convergenza per componenti, ciò equivale a richiedere $\gamma(t_k) \rightarrow \gamma(t)$ per ogni successione $t_k \rightarrow t$ in I . Una funzione continua γ si dice una *curva*.

Esempio 72. In $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ è una curva. In $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ è una curva (elica).



Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice *connesso* (per cammini) se ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ammette una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ t.c. $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$.



Lemma 73. Siano $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ continua. Allora $f \circ \gamma$ è continua.

Dimostrazione. Analogo al caso di $g \circ f$. Alternativamente, sia $\{t_k\}$ in $[a, b]$, $t_k \rightarrow t \in [a, b]$. Allora $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k) = \gamma(t) \in \Omega$, e per la continuità di f , $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\gamma(t_k)) = f(\gamma(t)) = f \circ \gamma(t)$. $\square$

Teorema 74. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ è connesso.

Dimostrazione. Siano $s, t \in f(\Omega)$. Allora esistono $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ t.c. $f(\mathbf{x}) = s$, $f(\mathbf{y}) = t$. Per connessione di Ω , esiste $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ continua, $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$. Per il lemma precedente $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, ed è una curva in $f(\Omega)$ con $f \circ \gamma(a) = f(\mathbf{x}) = s$, $f \circ \gamma(b) = f(\mathbf{y}) = t$. Siccome s, t sono arbitrari, $f(\Omega)$ è connesso. $\square$

Esercizi

Descrivere la curva

$$\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t) \text{ in } \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^3, t^3) \text{ in } \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \text{ per } t \in [-1, 1] \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Calcolare funzioni composte.

$$f(x, y) = x^2 y, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t); \quad f(x, y, z) = x + y - z, \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

2026.10.15: Insiemi connessi, esercizi

Ricordiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice connesso se per ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ esiste una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ t.c. $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$.

Lemma 75. *Un insieme connesso in $\mathbb{R}$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Sia $I \subset \mathbb{R}$ connesso. Se I è vuoto o ridotto a un punto non c'è niente da dimostrare, perché $\{c\} = [c, c]$; supponiamo dunque $\inf I < \sup I$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\inf I < \lambda < \sup I$. Allora esistono $x, y \in I$ t.c. $y < \lambda < x$. Per la connessione di I , esiste una curva (funzione) continua $\gamma: [a, b] \rightarrow I$ t.c. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Per il teorema degli zeri in una variabile (valore intermedio, AM1), esiste $c \in (a, b)$ t.c. $\gamma(c) = \lambda$, dunque $\lambda \in I$. Questo dimostra che $(\inf I, \sup I) \subset I$; d'altra parte $I \subset [\inf I, \sup I]$ per definizione di estremo inferiore e superiore. Dunque I è uno dei quattro intervalli di estremi $\inf I$ e $\sup I$, a seconda che questi siano assunti o no. $\square$

Corollario 76. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(\Omega)$ è un intervallo (eventualmente ridotto a un punto).*

Dimostrazione. Per il teorema del 10.13, $f(\Omega)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$; per il lemma precedente, è un intervallo. $\square$

Teorema 77 (degli zeri). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ t.c. $f(\mathbf{x}) > 0$, $f(\mathbf{y}) < 0$. Allora esiste $\mathbf{z} \in \Omega$ t.c. $f(\mathbf{z}) = 0$.*

Dimostrazione. Per il corollario precedente $f(\Omega)$ è un intervallo, e contiene $f(\mathbf{y}) < 0$ e $f(\mathbf{x}) > 0$. Siccome 0 sta fra questi due valori, anche $0 \in f(\Omega)$, ossia esiste $\mathbf{z} \in \Omega$ t.c. $f(\mathbf{z}) = 0$. $\square$

Proposizione 78. *Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in E\}$. (1) Sia E aperto in $\mathbb{R}$. Allora $f^{-1}(E)$ è aperto. (2) Sia E chiuso in $\mathbb{R}$. Allora $f^{-1}(E)$ è chiuso.*

Dimostrazione. (1) Sia $\mathbf{x} \in f^{-1}(E)$, ossia $f(\mathbf{x}) \in E$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(f(\mathbf{x})) \subset E$, ossia $(f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon) \subset E$. Per la caratterizzazione ε - δ della continuità (10.12), esiste $\delta > 0$ t.c. per $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$, vale $f(\mathbf{y}) \in B_\varepsilon(f(\mathbf{x})) \subset E$. Allora $\mathbf{y} \in f^{-1}(E)$. Ossia $B_\delta(\mathbf{x}) \subset f^{-1}(E)$.

(2) E^c è aperto. Si ha

$$f^{-1}(E^c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in E^c\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \notin E\} = (f^{-1}(E))^c.$$

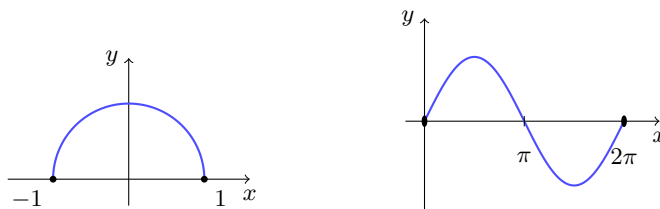
Per (1), $f^{-1}(E^c)$ è aperto. Allora $f^{-1}(E) = ((f^{-1}(E))^c)^c = (f^{-1}(E^c))^c$ è chiuso, per il teorema del 10.08 (Ω è aperto se e solo se Ω^c è chiuso). $\square$

Esercizi

Dire se i seguenti insiemi sono aperti / chiusi / limitati / connessi:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 2\}, \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 16\}.$$

Trovare una rappresentazione come curva dei due insiemi disegnati.



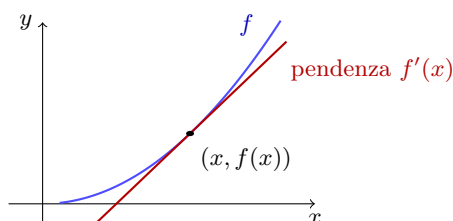
Calcolare la funzione composta.

- $f(x, y, z) = x + ye^z$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$; calcolare $f \circ \gamma$ e $\gamma \circ f$.
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\gamma(t) = (\cos(t^2) \cos t, \cos(t^2) \sin t, \sin(t^2))$; calcolare $f \circ \gamma$.

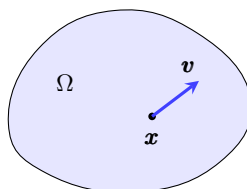
Siano A, B aperti. Dimostrare che $A \cup B$, $A \cap B$ sono aperti. Ci sono $\{A_n\}$ aperti, $n \in \mathbb{N}$, t.c. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ non è aperto?

2026.10.19: Derivate parziali (Epsilon 2, Sezioni 1.6 in poi)

In AM1, abbiamo definito la derivata di una funzione f come $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, e dà la pendenza del grafico di f al punto $(x, f(x))$.



Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Ci sono tante direzioni in $\mathbb{R}^n$, descritte da un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.



Definizione 79 (derivata direzionale). Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. Se il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

esiste, allora si scrive $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$, e si dice la *derivata nella direzione $\mathbf{v}$* di f in $\mathbf{x}$.

Esempio 80. Siano $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 y$, $\mathbf{x}_0 = (-1, 3)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ($\|\mathbf{v}\| = 1$). $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} = \left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}, 3 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(3 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right) - (-1)^2 \cdot 3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left(-\frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + o(t)}{t} = -\frac{11}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Osservazione 81. Per definire derivate direzionali, $\mathbf{x}_0$ può essere al bordo di Ω se $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \in \Omega$ per $t > 0$ abbastanza piccolo; in tal caso si prende il limite unilaterale $t \rightarrow 0^+$.

Come casi particolari, si considerano $\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, \underset{k\text{-esimo}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. La derivata nella direzione $\mathbf{e}_k$ si dice *derivata parziale* rispetto a x_k di f in $\mathbf{x}$. Si usano i seguenti simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}), \quad D_{x_k}f(\mathbf{x}), \quad \partial_{x_k}f(\mathbf{x}), \quad D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{x}), \quad D_kf(\mathbf{x}).$$

Sia $n = 2$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$D_1f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}$$

è la derivata della funzione $x \mapsto f(x, y)$ ($\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{x} + t\mathbf{e}_1 = (x + t, y)$), ossia la funzione f in cui y è trattato come una costante. Analogamente, se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $D_kf(\mathbf{x})$ si può calcolare facendo la derivata della funzione $x_k \mapsto f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$, considerando gli altri x_j , $j \neq k$, costanti.

Esempio 82. • $f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_x f(x, y) = 2x - 3 + 4y, \quad \partial_y f(x, y) = 4x.$$

• $f(x, y) = e^{x^2+3y^2} \sin(x - y)$:

$$\partial_x f(x, y) = 2x e^{x^2+3y^2} \sin(x - y) + e^{x^2+3y^2} \cos(x - y),$$

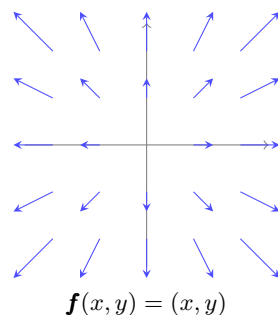
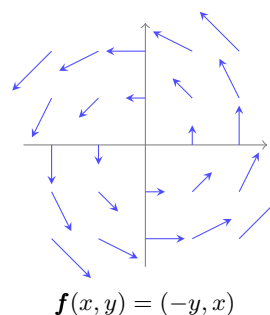
$$\partial_y f(x, y) = 6y e^{x^2+3y^2} \sin(x - y) - e^{x^2+3y^2} \cos(x - y).$$

Campi vettoriali e gradiente

Finora abbiamo considerato funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ o da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$. È possibile considerare anche funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Come per le curve, una funzione $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ assegna, per $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, un vettore $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$. Ogni componente $f_j(\mathbf{x}) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ è una funzione da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$.

Quando $m = n$, e si considerano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ si dice *campo vettoriale*. Un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ si può rappresentare con frecce sul piano.

Esempio 83. $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$; $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$.



Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Raccogliendo tutte le derivate parziali,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), \dots, D_n f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$$

si dice *gradiente* di f in $\mathbf{x}$. È definito nei punti in cui tutte le derivate parziali esistono, e lì è un esempio di campo vettoriale.

Vedremo il 10.20 che, se f è differenziabile in $\mathbf{x}$, il gradiente dà tutte le derivate direzionali: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}$ con $\|\mathbf{v}\| = 1$. L'esempio all'inizio della lezione è un caso particolare.

Esempio 84. • $f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$, $\nabla f(x, y) = (2x - 3 + 4y, 4x)$.

$$\bullet g(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4, \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 3y^2, 4z^3).$$

Osservazione 85. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f e g abbiano derivate parziali in $\mathbf{x}$. Si ha

- $\nabla(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x})$,
- $\nabla(f + g)(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})$,
- $\nabla(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$,
- $\nabla(f/g)(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}$ se $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

Qua si intende

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}) + D_1 g(\mathbf{x}), \dots, D_n f(\mathbf{x}) + D_n g(\mathbf{x})),$$

$$f(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})D_1 g(\mathbf{x}), \dots, f(\mathbf{x})D_n g(\mathbf{x})).$$

In generale, se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ sono campi vettoriali, anche $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ lo è; e se $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione a valori reali e $\mathbf{G}$ è un campo vettoriale, anche $h\mathbf{G}$ è un campo vettoriale.

Esercizi. Calcolare il gradiente di $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ e di $g(x, y, z) = y \sin(z)$.

2026.10.20: Differenziabilità (testo Sez. 1.7)

Per una funzione f su $\mathbb{R}$, se è derivabile in x_0 , allora $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$. In $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f si dice *derivabile* in $\mathbf{x}_0$ se ci sono tutte le derivate parziali $D_k f(\mathbf{x}_0)$.

In $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, anche se f è derivabile in $\mathbf{x}_0$, non è detto che sia continua in $\mathbf{x}_0$.

Esempio 86.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Allora

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Ma $(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$ (per $k \rightarrow \infty$), $f(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}) = 1 \rightarrow 1$, mentre $f(0, 0) = 0$.

Definizione 87. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. f si dice *differenziabile* in $\mathbf{x}_0$ se esiste un vettore $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Ossia,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Teorema 88. Sia f differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Allora (1) f è continua in $\mathbf{x}_0$; (2) f è derivabile in $\mathbf{x}_0$; (3) $\mathbf{m} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione. (1) Si ha

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

e il membro destro tende a 0 per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$: il primo addendo perché $|\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{m}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, il secondo per definizione di $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$. Dunque $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

(2)(3) Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k$. Allora

$$\begin{aligned} D_k f(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k - \mathbf{x}_0) + o(|t|)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_k + o(|t|)}{t} = m_k. \end{aligned}$$

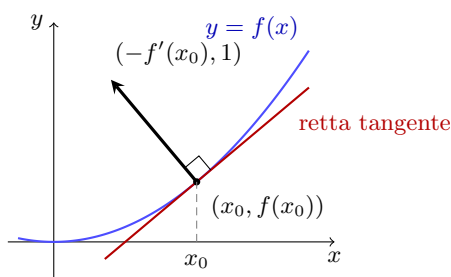
Questo dimostra $\mathbf{m} = (D_1 f(\mathbf{x}_0), \dots, D_n f(\mathbf{x}_0)) = \nabla f(\mathbf{x}_0)$. $\square$

La derivabilità in $\mathbb{R}$ corrisponde alla differenziabilità in $\mathbb{R}^n$. Per una funzione f su $\mathbb{R}$, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ rappresenta la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Il vettore $(-f'(x_0), 1)$ è ortogonale alla retta tangente.

Analogamente, la formula $y = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, determina l'(iper)piano in $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si dice il *piano tangente* al grafico di f in $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$. Il vettore $(-\nabla f(\mathbf{x}_0), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è normale (ortogonale) al piano tangente di f in $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$. Infatti, i vettori nel piano tangente si scrivono $(\mathbf{u}, \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u})$. Dunque

$$(-\nabla f(\mathbf{x}_0), 1) \cdot (\mathbf{u}, \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

come nel caso di $\mathbb{R}$.



Teorema 89. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Allora

$$\mathbf{v}_{\max} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

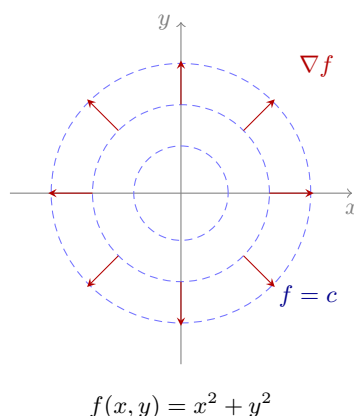
è la direzione di massima crescita, ossia, $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$ è il massimo per $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\max}$.

Dimostrazione. Per $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, vale che

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot t\mathbf{v} + o(|t|)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cos \alpha,$$

dove α è l'angolo tra il vettore $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{v}$. Questo assume il massimo quando $\alpha = 0$, ossia quando $\mathbf{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ hanno lo stesso verso. (Con $\alpha = \pi$, cioè $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_{\max}$, si ottiene invece il minimo.) $\square$

Esempio 90. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$.



Proposizione 91. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se f, g sono differenziabili in $\mathbf{x}_0$, allora lo sono anche αf , $f + g$ e fg .

Dimostrazione. Prendiamo come esempio il caso del prodotto fg ; i casi αf e $f + g$ sono analoghi e più semplici. Ricordiamo $\nabla(fg)(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\nabla g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Per ipotesi,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|), \\ g(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}_0) + \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \end{aligned}$$

per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Dunque

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0) + (f(\mathbf{x}_0)\nabla g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\nabla f(\mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

perché il termine misto $(\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ è $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$, dunque $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$. □

Anche la composizione $f \circ g$, con f di una variabile, è differenziabile: lo dimostriamo il 10.22, dove il punto delicato viene trattato per esteso.

Esempio 92. Siano $f(t) = \exp t$, $g(x, y) = x^2 y$. $(f \circ g)(x, y) = e^{x^2 y}$. Dunque $\nabla g(x, y) = (2xy, x^2)$ e

$$\nabla(f \circ g)(x, y) = (2xy e^{x^2 y}, x^2 e^{x^2 y}) = e^{x^2 y} (2xy, x^2) = e^{x^2 y} \nabla g(x, y),$$

come previsto dalla Proposizione, essendo $\exp' = \exp$.

Esercizio. Calcolare ∇h per

- $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0$.
- $h(x, y) = \cos(x^y), x > 0$.

2026.10.22: Differenziabilità

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ (oppure Ω qualunque e $\mathbf{x}_0$ interno a Ω). f si dice differenziabile in $\mathbf{x}_0$ se $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Teorema 93. Se f è derivabile in $B_r(\mathbf{x}_0)$ per qualche $r > 0$ e se $D_1 f, \dots, D_n f$ sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione. Per semplicità lo dimostriamo per $n = 2$; il caso generale è analogo, con n incrementi parziali invece di due. Scriviamo $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e $f(x, y)$. Appliciamo il teorema del valore medio alle funzioni di una variabile $s \mapsto f(s, y_0)$ e $s \mapsto f(x, s)$: esistono ξ tra x e x_0 , η tra y e y_0 t.c.

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= (f(x, y) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \\ &= D_y f(x, \eta)(y - y_0) + D_x f(\xi, y_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, $\xi \rightarrow x_0$, $\eta \rightarrow y_0$. Per la continuità di $D_y f$, $D_x f$,

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot ((x, y) - (x_0, y_0))|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \\ &= \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - (D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0))|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= \frac{|(D_x f(\xi, y_0) - D_x f(x_0, y_0))(x - x_0) + (D_y f(x, \eta) - D_y f(x_0, y_0))(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\leq |D_x f(\xi, y_0) - D_x f(x_0, y_0)| + |D_y f(x, \eta) - D_y f(x_0, y_0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. □

Regola di catena

Teorema 94. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\Omega) \subset I$. Supponiamo che g sia differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e che f sia derivabile in $g(\mathbf{x}_0)$. Allora $f \circ g$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e

$$\nabla(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Dimostrazione. Si pone

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(\mathbf{x}_0))}{y - g(\mathbf{x}_0)} & \text{se } y \neq g(\mathbf{x}_0), \\ f'(g(\mathbf{x}_0)) & \text{se } y = g(\mathbf{x}_0). \end{cases}$$

Dire che h è continua in $y = g(\mathbf{x}_0)$ è esattamente dire che f è derivabile in $g(\mathbf{x}_0)$: il valore $h(g(\mathbf{x}_0)) = f'(g(\mathbf{x}_0))$ è per definizione il limite del rapporto incrementale. Inoltre $f(y) - f(g(\mathbf{x}_0)) = (y - g(\mathbf{x}_0))h(y)$ per ogni $y \in I$, estremo incluso.

Allora, ponendo $y = g(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} & \frac{|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - f'(g(\mathbf{x}_0))\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{|h(g(\mathbf{x})) (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)) - f'(g(\mathbf{x}_0))\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{|h(g(\mathbf{x})) (\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)) - f'(g(\mathbf{x}_0))\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{|(h(g(\mathbf{x})) - f'(g(\mathbf{x}_0))) \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(g(\mathbf{x})) o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}. \end{aligned}$$

Questa tende a 0 per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$: Il primo termine perché $|\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq \|\nabla g(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ per Cauchy-Schwarz, e $h(g(\mathbf{x})) \rightarrow h(g(\mathbf{x}_0)) = f'(g(\mathbf{x}_0))$: infatti g è continua in $\mathbf{x}_0$ (essendo differenziabile) e h è continua in $g(\mathbf{x}_0)$. Il secondo perché $h(g(\mathbf{x}))$ è limitato vicino a $\mathbf{x}_0$ e $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$. □

Teorema 95. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$, $\gamma: I \rightarrow \Omega$ con $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ derivabili in t_0 , e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\gamma(t_0)$. Allora $f \circ \gamma$ è derivabile in t_0 (per funzioni di una variabile derivabilità e differenziabilità coincidono), e

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0), \quad \gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)).$$

Dimostrazione. Qua si calcola (si veda Osservazione che segue per un argomento preciso),

$$\begin{aligned} & \frac{|f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)(t - t_0)|}{|t - t_0|} \\ &= \frac{|\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + o(\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)(t - t_0)|}{|t - t_0|} \\ &= \frac{|\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot o(|t - t_0|) + o(|t - t_0|)|}{|t - t_0|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

per $t \rightarrow t_0$, dove il primo $o(|t - t_0|)$ è un vettore e il secondo uno scalare. Nell'ultimo passaggio si è usato $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$, che vale perché le componenti sono derivabili in t_0 , e $\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = O(|t - t_0|)$, da cui $o(\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|) = o(|t - t_0|)$. $\square$

Osservazione 96. Nel passaggio in cui si sostituisce $\mathbf{z} = \gamma(t)$ nello sviluppo di f in $\gamma(t_0)$, l'affermazione ha senso per $\mathbf{z} \neq \gamma(t_0)$ ($o(\|\mathbf{z} - \gamma(t_0)\|)$ significa una quantità più piccola rispetto a $\|\mathbf{z} - \gamma(t_0)\| \neq 0$), mentre $\gamma(t)$ può assumere il valore $\gamma(t_0)$ per t vicini a t_0 . Per quei t la stima vale comunque: se si accumulano in t_0 allora $\gamma'(t_0) = 0$ e il numeratore è nullo, altrimenti sono isolati. In alternativa si scrive $f(\mathbf{z}) - f(\gamma(t_0)) = \mathbf{H}(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{z} - \gamma(t_0))$ con $\mathbf{H}$ continua in $\gamma(t_0)$: è l'analogo di h , a valori vettoriali.

Esercizi

Calcolare $D(f(\gamma(t)))$.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$.
- $f(x, y) = e^{xy}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Calcolare la derivata.

- $f(x) = x^{(x^x)}$, $x > 0$.
- $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2} dt$.

2026.10.26: Punti critici (Epsilon 2, Sez. 1.9)

Per una funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}$, possiamo trovare i punti di massimo/minimo locali. Prima si cercano *punti critici*, i punti dove $f'(x_0) = 0$, e si studia $f''(x_0) \gtrless 0$.

Definizione 97. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ un punto interno. $\mathbf{x}_0$ si dice un *punto critico* di f se f è derivabile in $\mathbf{x}_0$ e $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Ossia, $D_1 f(\mathbf{x}_0) = 0$, $D_2 f(\mathbf{x}_0) = 0$, $\dots$, $D_n f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Esempio 98. • $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 y + x^2 - xy - 1$. $\nabla f(x, y) = (3x^2 y + 2x - y, x^3 - x)$. In un punto critico (x_0, y_0) , vale $\nabla f(x_0, y_0) = (3x_0^2 y_0 + 2x_0 - y_0, x_0^3 - x_0) = (0, 0)$. Ossia, dobbiamo cercare coppie (x_0, y_0) t.c. $3x_0^2 y_0 + 2x_0 - y_0 = 0$, $x_0^3 - x_0 = 0$. Dalla seconda,

$x_0(x_0^2 - 1) = x_0(x_0 - 1)(x_0 + 1) = 0$, dunque $x_0 = -1, 0$ o 1 . Corrispondentemente, dalla prima,

$$\begin{aligned} x_0 = -1 &\implies 3(-1)^2 y_0 + 2(-1) - y_0 = 2y_0 - 2 = 0 \implies y_0 = 1, & (x_0, y_0) &= (-1, 1), \\ x_0 = 0 &\implies 0 + 0 - y_0 = 0 \implies y_0 = 0, & (x_0, y_0) &= (0, 0), \\ x_0 = 1 &\implies 3 \cdot 1^2 y_0 + 2 \cdot 1 - y_0 = 2y_0 + 2 = 0 \implies y_0 = -1, & (x_0, y_0) &= (1, -1). \end{aligned}$$

Dunque f ammette tre punti critici.

- $\Omega = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = 3x^2 - 5xy + xyz^2$. $\nabla f(x, y, z) = (6x - 5y + yz^2, -5x + xz^2, 2xyz)$.
In un punto critico (x_0, y_0, z_0) :

$$6x_0 - 5y_0 + y_0 z_0^2 = 0, \quad (1)$$

$$-5x_0 + x_0 z_0^2 = 0, \quad (2)$$

$$2x_0 y_0 z_0 = 0. \quad (3)$$

Da (3), $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$ o $z_0 = 0$. Consideriamo i tre casi separatamente.

- $x_0 = 0$. Allora (2) e (3) sono soddisfatte, mentre (1) diventa $-5y_0 + y_0 z_0^2 = y_0(z_0^2 - 5) = 0$, ossia $y_0 = 0$ o $z_0 = \pm\sqrt{5}$.
 - * Se $y_0 = 0$, z_0 è arbitrario: $(0, 0, z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
 - * Se $z_0 = \pm\sqrt{5}$, y_0 è arbitrario: $(0, y_0, \pm\sqrt{5})$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
- $y_0 = 0$. Allora (3) è soddisfatta, mentre (1) diventa $6x_0 = 0$, ossia $x_0 = 0$. Con $x_0 = y_0 = 0$, anche (2) è soddisfatta, e z_0 è arbitrario: $(0, 0, z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$ (già trovati nel caso precedente).
- $z_0 = 0$. Allora (3) è soddisfatta, mentre (2) diventa $-5x_0 = 0$, ossia $x_0 = 0$. Con $x_0 = z_0 = 0$, (1) diventa $-5y_0 = 0$, ossia $y_0 = 0$: $(0, 0, 0)$ (già trovato, è $(0, 0, z_0)$ con $z_0 = 0$).

I punti critici sono $(0, 0, z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, e $(0, y_0, \pm\sqrt{5})$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Definizione 99. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Si dice che $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo (risp. minimo) *locale* o *relativo* se esiste $r > 0$ t.c. per tutti $\mathbf{x} \in \Omega \cap B_r(\mathbf{x}_0)$, vale $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (risp. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$). Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo/massimo locale/globale, $\mathbf{x}_0$ si dice un *punto di estremo* locale/globale.

Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo (minimo) globale, allora è un punto di massimo (minimo) locale, ma non viceversa.

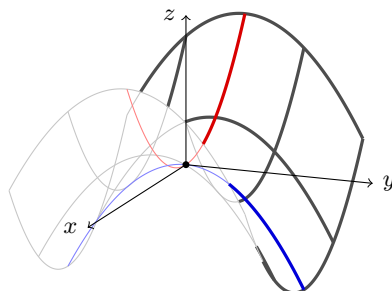
Teorema 100 (di Fermat). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ interno, f derivabile in $\mathbf{x}_0$. Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di estremo locale, allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di estremo locale, per esempio di massimo (il caso del minimo è analogo). Sia $r > 0$ abbastanza piccolo t.c. $B_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ e $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ per tutti $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$. Consideriamo, per $k = 1, \dots, n$, la funzione $(-r, r) \ni t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k)$. Questa funzione è derivabile in $t = 0$, e ha un punto di massimo locale in $t = 0$, perché $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in B_r(\mathbf{x}_0)$ per $|t| < r$. Allora per il teorema di Fermat per $n = 1$ (Epsilon 1, Teorema 6.48), segue che la derivata è 0. Ossia, $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$ per tutti $k = 1, \dots, n$. $\square$

Anche se $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, non è detto che $\mathbf{x}_0$ sia un punto di min/max locale.

Esempio 101. Sia $f(x, y) = x^3$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. $\nabla f(x, y) = (3x^2, 0)$. Dunque $(0, y_0)$ sono punti critici, ma non sono punti di min/max. Infatti, $f(0, y_0) = 0$, mentre $f(x, y_0) > 0$ per $x > 0$ e $f(x, y_0) < 0$ per $x < 0$: in ogni intorno di $(0, y_0)$ f assume valori sia maggiori sia minori di $f(0, y_0)$.

Esempio 102. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Punto critico $(0, 0)$. Ma $(0, 0)$ non è né un punto di massimo né di minimo. Infatti, se $x \neq 0$, $y = 0$, allora $f(x, y) > 0$; se $x = 0$, $y \neq 0$, allora $f(x, y) < 0$. Ma $f(0, 0) = 0$.



$$z = x^2 - y^2$$

Lungo l'asse x (in rosso) f ha un minimo in 0, lungo l'asse y (in blu) un massimo.

Corollario 103. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di estremo locale, allora (1) o $\mathbf{x}_0$ non è interno, (2) o f non è derivabile in $\mathbf{x}_0$, (3) o $\mathbf{x}_0$ è un punto critico di f .

Dimostrazione. Se $\mathbf{x}_0$ è interno ed f è derivabile, allora vale (3). Altrimenti (1) o (2). $\square$

Esempio 104. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{\|(x, y)\| \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. $f(x, y) = \|(x, y)\|^2 \leq 1 = f(1, 0)$. Dunque $(1, 0)$ è un punto di massimo di f in Ω anche se non è critico ($\nabla f(1, 0) = (2, 0) \neq \mathbf{0}$).

$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. $(0, 0)$ è un punto di minimo di f in Ω , ma ∇f non esiste in $(0, 0)$.

2026.10.27: Derivate del secondo ordine (Epsilon 2, Sez. 1.10)

Definizione 105. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ interno, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$.

(i) Supponiamo che $D_{\mathbf{v}}f$ esista in un intorno di $\mathbf{x}_0$ ($B_r(\mathbf{x}_0)$ per qualche $r > 0$). Se

$$D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}) - D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

esiste, si dice la *derivata direzionale del secondo ordine*, o *derivata direzionale seconda*.

(ii) In particolare, nel caso $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_j$, si chiama *derivata parziale seconda*:

$$D_{\mathbf{e}_j}(D_{\mathbf{e}_k}f)(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_k f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - D_k f(\mathbf{x}_0)}{t} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) =: D_{jk}^2 f(\mathbf{x}_0) =: D_j D_k f(\mathbf{x}_0).$$

(iii) f si dice *due volte differenziabile* in $\mathbf{x}_0$ se è differenziabile in un intorno di $\mathbf{x}_0$ e tutte le $D_k f$ sono differenziabili in $\mathbf{x}_0$, $k = 1, \dots, n$.

(iv) Sia Ω aperto. Se le derivate parziali $\partial_{x_k} f$ di f in Ω esistono e sono continue, f si dice di *classe C^1* . Se esistono le derivate parziali seconde e sono continue, f si dice di *classe C^2* .

Esempio 106. • $f(x, y) = e^{xy^2}$.

$$D_x f(x, y) = y^2 e^{xy^2}, \quad D_y f(x, y) = 2xy e^{xy^2},$$

$$D_x D_x f(x, y) = y^4 e^{xy^2}, \quad D_y D_x f(x, y) = (2xy^3 + 2y) e^{xy^2},$$

$$D_x D_y f(x, y) = (2y + 2xy^3) e^{xy^2}, \quad D_y D_y f(x, y) = (2x + 4x^2 y^2) e^{xy^2}.$$

- Sia $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ su $\mathbb{R}^n$. f è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. $D_k f(\mathbf{x}) = x_k / \|\mathbf{x}\|$,
e

$$D_j D_k f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^3} & \text{se } j = k, \\ -\frac{x_j x_k}{\|\mathbf{x}\|^3} & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

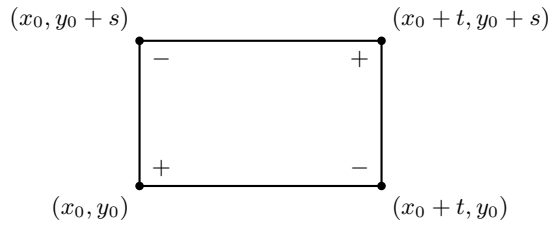
Teorema 107 (di Schwarz). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ interno, $j, k = 1, \dots, n$. Supponiamo che $D_j D_k f$ e $D_k D_j f$ esistano in un intorno di $\mathbf{x}_0$ e siano continue in $\mathbf{x}_0$. Allora $D_j D_k f(\mathbf{x}_0) = D_k D_j f(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n = 2$, $f(x, y)$, (x_0, y_0) . Siano t, s piccoli, $G(x) = f(x, y_0 + s) - f(x, y_0)$. Allora $G'(x) = D_x f(x, y_0 + s) - D_x f(x, y_0)$. Per il teorema del valor medio, applicato a G , esiste θ_1 , $0 < \theta_1 < 1$, t.c.

$$\begin{aligned} f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + s) + f(x_0, y_0) \\ = G(x_0 + t) - G(x_0) = t G'(x_0 + \theta_1 t) = t (D_x f(x_0 + \theta_1 t, y_0 + s) - D_x f(x_0 + \theta_1 t, y_0)). \end{aligned}$$

Sia $H(y) = D_x f(x_0 + \theta_1 t, y)$. Per il teorema del valor medio applicato a H , esiste φ_1 , $0 < \varphi_1 < 1$, t.c.

$$\cdots = t \cdot s D_y D_x f(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \varphi_1 s).$$



Analogamente, scambiando i ruoli di x e y , esistono θ_2, φ_2 , $0 < \theta_2, \varphi_2 < 1$, t.c.

$$f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) + f(x_0, y_0) = s t D_x D_y f(x_0 + \theta_2 t, y_0 + \varphi_2 s).$$

Ossia, $D_x D_y f(x_0 + \theta_2 t, y_0 + \varphi_2 s) = D_y D_x f(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \varphi_1 s)$. Per $t, s \rightarrow 0$, per continuità di $D_x D_y f$ e $D_y D_x f$ in (x_0, y_0) , il membro sinistro tende a $D_x D_y f(x_0, y_0)$ e il membro destro a $D_y D_x f(x_0, y_0)$. Dunque $D_x D_y f(x_0, y_0) = D_y D_x f(x_0, y_0)$. $\square$

In particolare, se f è di classe C^2 , allora $D_j D_k f = D_k D_j f$ per tutti j, k .

Definizione 108. Supponiamo che esistano tutte le derivate parziali seconde $D_j D_k f(\mathbf{x}_0)$, $j, k = 1, \dots, n$. La matrice

$$D^2 f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}_0) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}_0) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}_0) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}_0) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}_0) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}_0) & D_n D_2 f(\mathbf{x}_0) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix},$$

ossia la matrice $n \times n$ il cui elemento (j, k) è $D_j D_k f(\mathbf{x}_0)$, si dice *matrice Hessiana* di f in $\mathbf{x}_0$, e si denota anche $Hf(\mathbf{x}_0)$. Se f è di classe C^2 , per il teorema di Schwarz la matrice Hessiana è simmetrica.

Esempio 109. • $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$. $D_x f(x, y) = 3x^2 + y$, $D_y f(x, y) = x + 2y$.

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(2, 3) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

•

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$D_x D_y f(0, 0) \neq D_y D_x f(0, 0)$. Infatti, siccome $f(x, 0) = 0$ per tutti x , $D_x f(0, 0) = 0$, e per $(x, y) \neq (0, 0)$

$$D_x f(x, y) = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$D_x f(0, y) = \begin{cases} -y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \quad D_y D_x f(0, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_x f(0, s) - D_x f(0, 0)}{s} = -1.$$

D'altra parte, $D_y f(0, 0) = 0$ (perché $f(0, y) = 0$) e, per $x \neq 0$,

$$D_y f(x, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s) - f(x, 0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - s^2)}{x^2 + s^2} = x.$$

Dunque

$$D_y f(x, 0) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad D_x D_y f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_y f(t, 0) - D_y f(0, 0)}{t} = 1.$$

Questo non contraddice il teorema di Schwarz: le derivate seconde miste $D_x D_y f$ e $D_y D_x f$ non sono continue in $(0, 0)$.

- Calcolare la Hessiana di $f(x, y) = e^{x+y^2+xy}$.

$$D_x f(x, y) = (1 + y)e^{x+y^2+xy}, \quad D_y f(x, y) = (2y + x)e^{x+y^2+xy},$$

$$Hf(x, y) = e^{x+y^2+xy} \begin{pmatrix} (1 + y)^2 & 1 + (1 + y)(2y + x) \\ 1 + (1 + y)(2y + x) & 2 + (2y + x)^2 \end{pmatrix}.$$

2026.10.29: Polinomio di Taylor del secondo ordine (Epsilon 2, Sez. 1.11)

Sia $f(x)$ una funzione su $\mathbb{R}$, due volte derivabile in x_0 . Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

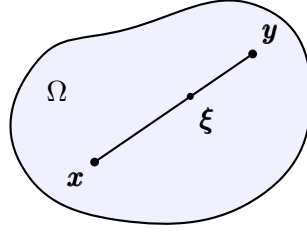
per $x \rightarrow x_0$ (Peano).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Per $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ denotiamo il segmento chiuso e il segmento aperto di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ con

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : 0 < t < 1\}.$$

(qui $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denota il segmento aperto, non una coppia di vettori) Inoltre, per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ scriviamo il prodotto scalare sia $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ sia $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Teorema 110 (del valor medio, di Lagrange). *Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, e supponiamo che $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \Omega$. Supponiamo che f sia continua in $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, differenziabile in $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Allora esiste $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ t.c. $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$.*



Dimostrazione. Se $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, è banale. Sia $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Poniamo $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}$, $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{w})$. Allora g è continua in $[0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|]$, derivabile in $(0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$, e, siccome f è differenziabile, $g'(t) = D_{\mathbf{w}}f(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) = \nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$. Per il teorema del valor medio (di Lagrange) in $\mathbb{R}$ esiste $c \in (0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$ t.c.

$$g(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) - g(0) = g'(c) (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| - 0),$$

ossia, con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + c\mathbf{w} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{w} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad \square$$

Lemma 111. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora, come funzione di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$D_k(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle) = v_k.$$

Dimostrazione. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = \sum_{j=1}^n v_j(x_j - x_{0,j})$, e derivando rispetto a x_k resta solo il termine $j = k$, che dà v_k . $\square$

Lemma 112. Sia $A = (A_{jk})_{j,k=1}^n$ una matrice $n \times n$, e per $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$A\mathbf{v} = \left(\sum_{k=1}^n A_{1k}v_k, \sum_{k=1}^n A_{2k}v_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{nk}v_k \right).$$

Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora, come funzione di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$D_k(\langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle) = \sum_{j=1}^n A_{jk}(x_j - x_{0,j}) + \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell}(x_\ell - x_{0,\ell}).$$

In particolare, se A è simmetrica ($A_{jk} = A_{kj}$), allora

$$D_k(\langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle) = 2 \sum_{j=1}^n A_{kj}(x_j - x_{0,j}).$$

Dimostrazione. $\langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n A_{j\ell}(x_\ell - x_{0,\ell})(x_j - x_{0,j})$. Derivando rispetto a x_k , i termini con $\ell = k$ danno $\sum_{j=1}^n A_{jk}(x_j - x_{0,j})$, quelli con $j = k$ danno $\sum_{\ell=1}^n A_{k\ell}(x_\ell - x_{0,\ell})$. $\square$

Teorema 113 (sviluppo di Taylor del secondo ordine). Siano $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, f di classe C^2 in un intorno di $\mathbf{x}_0$. Allora

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \langle D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$$

per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ (il resto di Peano).

Dimostrazione. Sia $r > 0$ t.c. f è di classe C^2 in $B_r(\mathbf{x}_0)$. Poniamo

$$R(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \left(f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \langle D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle \right).$$

Siccome f è di classe C^2 , R è differenziabile in $B_r(\mathbf{x}_0)$, e $R(\mathbf{x}_0) = 0$. Sia $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Per il teorema del valor medio, esiste $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ t.c.

$$R(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x}_0) = \nabla R(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Per il teorema di Schwarz (f è di classe C^2), $D^2 f(\mathbf{x}_0)$ è simmetrica. Dunque, per i due Lemmi precedenti applicati con $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $A = D^2 f(\mathbf{x}_0)$,

$$D_k R(\mathbf{x}) = D_k f(\mathbf{x}) - D_k f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^n D_j D_k f(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0,j}),$$

ossia $D_k R(\mathbf{x}) = D_k f(\mathbf{x}) - D_k f(\mathbf{x}_0) - \nabla D_k f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Si noti che $D_k R(\mathbf{x}_0) = 0$.

Siccome $D_k f$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, si ha $\frac{D_k R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{D_k R(\mathbf{x}) - D_k R(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \rightarrow 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Dunque, siccome $|x_k - x_{0,k}| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ e $0 < \|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$,

$$\frac{|R(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \frac{|\nabla R(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|D_k R(\boldsymbol{\xi})| |x_k - x_{0,k}|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|D_k R(\boldsymbol{\xi})|}{\|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0\|} \cdot \frac{|x_k - x_{0,k}|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \rightarrow 0$$

per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, perché $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}_0$ (dunque il primo fattore tende a 0) e il secondo fattore è ≤ 1 . $\square$

In $\mathbb{R}^2$, con $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, il polinomio di Taylor del secondo ordine è

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \\ + \frac{1}{2} \left(D_x D_x f(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2D_x D_y f(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ \left. + D_y D_y f(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right). \end{aligned}$$

Esempi / Esercizi

Determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine di f in $\mathbf{x}_0$.

- $f(x, y) = e^{xy} \cos y$, $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Si ha $f(0, 0) = 1$, $D_x f(x, y) = ye^{xy} \cos y$, $D_y f(x, y) = xe^{xy} \cos y - e^{xy} \sin y$, dunque $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$, e

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio di Taylor è $1 + xy - \frac{1}{2}y^2$. (Verifica: $e^{xy} \cos y = (1 + xy + \dots)(1 - \frac{1}{2}y^2 + \dots)$.)

- $f(x, y) = e^{3x-y^2}$, $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.
- $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3$, $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$.
- $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$.