

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.09.02

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando le risposte (le risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

- (a) Scrivere l'enunciato del criterio del confronto (che riguarda la convergenza e divergenza di due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, con $a_n \leq b_n$), specificando tutti gli oggetti e le proprietà che appaiono.
- Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni di numeri **non negativi**. Supponiamo che $a_n \leq b_n$ per tutti $n \in \mathbb{N}$ per n sufficientemente grande. Se $\sum_n b_n$ converge, allora anche $\sum_n a_n$ converge. Se $\sum_n a_n$ diverge, allora anche $\sum_n b_n$ diverge.
- (b) Stabilire se la seguente serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3 \log n + 4n + 2}$$

- Si applica il criterio del confronto con $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3 \log n + 4n + 2}$, $b_n = \frac{n+1}{n^3}$. Allora $a_n, b_n \geq 0$ (sia il numeratore che il denominatore sono positivi). Inoltre $a_n \leq b_n$ perché $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1$ e $n^3 \log n + 4n + 2 \geq n^3$. D'altra parte $\sum_n b_n = \sum_n \frac{n+1}{n^3} = \sum_n (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})$ converge. Per il criterio del confronto, converge anche $\sum_n a_n$. Poiché $a_n \geq 0$, la serie converge anche assolutamente.
- (c) Stabilire se la seguente successione converge puntualmente e/o uniformemente su $[0, 1]$ per $n \rightarrow \infty$.

$$f_n(x) = n^2 x e^{-xn}$$

- Sia $x = 0$, allora $f_n(0) = 0$ è convergente. Sia $x \in (0, 1]$. Allora sappiamo che $f_n(x) = n^2 x e^{-xn} = n^2 x (e^{-x})^n \rightarrow 0$ perché $e^{-x} < 1$. Quindi la successione $f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$.
D'altra parte, per ogni n , prendiamo $x = \frac{1}{n}$, allora $f_n(\frac{1}{n}) = n^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n} \cdot n} = \frac{n}{e}$ che non converge. In particolare, esiste $\epsilon = \frac{1}{2e} > 0$ tale che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, esiste $n \geq N$ (si può prendere $n = N$) e $x = \frac{1}{n} \in [0, 1]$ tale che $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{n}) - 0| = \frac{n}{e} > \frac{1}{2e}$. Questo dimostra che la successione $f_n(x)$ non converge uniformemente.

2. (10 punti)

- (a) Dare una funzione continua f su $\mathbb{R}^2$ che ammetta un punto di minimo globale.
- Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Per tutti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, vale $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$, mentre $f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$. Dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo globale.

- (b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione su $\mathbb{R}^2$ e stabilire se ognuno di essi è un punto di minimo locale, di massimo locale o di sella. Stabilire se alcuni di essi sono punti di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = 3x^3 + 4y^3 - x - 3y$$

- La funzione è differenziabile su tutti i punti del dominio $\mathbb{R}^2$, e dunque basta trovare i punti critici e studiarne la natura. Per un punto critico (x_0, y_0) di f , vale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 9x_0^2 - 1 \\ 12y_0^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque $9x_0^2 - 1 = 0, 12y_0^2 - 3 = 0$. Essi possono essere risolti separatamente: $x_0 = \pm \frac{1}{3}, y_0 = \pm \frac{1}{2}$. Dunque i punti critici sono $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$. Corrispondentemente, $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{9}, f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = -\frac{7}{9}, f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{7}{9}, f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{11}{9}$. Inoltre,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 24y \end{pmatrix},$$

dunque, per i punti critici sopra, le matrici Hessiane sono

- $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ su $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Tutti e due gli autovalori sono positivi, dunque è un punto di minimo locale.
- $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ su $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Ci sono due autovalori, uno positivo e uno negativo, dunque è un punto di sella.
- $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ su $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$. Ci sono due autovalori, uno positivo e uno negativo, dunque è un punto di sella.
- $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ su $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$. Tutti e due gli autovalori sono negativi, dunque è un punto di massimo locale.

Non ci sono punti di massimo e minimo globali, poiché $f(x, 0) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$, e $f(x, 0) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$. Dunque il punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ è un punto di minimo locale ma non globale, e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ è un punto di massimo locale ma non globale.

- (c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y) = x^3 \quad \text{vincolati all'insieme} \quad E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

e discutere se essi sono punti di minimo o massimo globali.

- Si pone $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$, dunque $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ su E .

Si nota che $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per il metodo di moltiplicatori di Lagrange, se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 3x_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \end{pmatrix}, \quad x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

Dunque $3x_0^2 = 2\lambda x_0, 0 = -2\lambda y_0, x_0^2 - y_0^2 = 1$.

- $3x_0^2 = 2\lambda x_0$ è soddisfatto se $x_0 = 0$, però è impossibile perché implicherebbe $0^2 - y_0^2 = 1$, ossia $0 = y_0^2 + 1$.
- Dunque $x_0 \neq 0$, e dividendo per x_0 , si ha $3x_0 = 2\lambda$.
- $0 = -2\lambda y_0$ è soddisfatto se $y_0 = 0$. In questo caso, $x_0^2 - 0^2 = 1$ dunque $x_0 = \pm 1$ (e $\lambda = \pm \frac{3}{2}$).
- Invece se $y_0 \neq 0$, allora seguirebbe che $\lambda = 0$, però questo implica che $x_0 = 0$ che è impossibile.

Dunque i punti critici sono $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$.

Per determinare se si tratta di un punto di minimo o di massimo, si nota che il vincolo $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole con due rami, e per ogni $y \in \mathbb{R}$, $x = \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Sul primo ramo, si ha $x = \sqrt{y^2 + 1}$ e dunque per $y \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow \infty$ e $f(x, y) = x^3 \rightarrow \infty$, dunque $(1, 0)$ è un punto di minimo locale (perché su questo ramo ce n'è uno solo punto critico). Sul secondo ramo, si ha $x = -\sqrt{y^2 + 1}$ e dunque per $y \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow -\infty$ e $f(x, y) = x^3 \rightarrow -\infty$, dunque $(-1, 0)$ è un punto di massimo locale (perché su questo ramo ce n'è uno solo punto critico). Inoltre f non ammette né un punto di minimo globale né un punto di massimo globale perché tende a $\pm\infty$ in certe direzioni.

3. (6 punti)

(a) Sia γ una parametrizzazione del cerchio C di raggio 1 con centro in $(0, 0)$ che comincia dal punto $(1, 0)$ e va in senso antiorario. Trovare una tale γ .

- Si può prendere, per esempio,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcolare il seguente integrale di linea, con γ sopra e $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

- Si ha $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $\mathbf{F}(\gamma(t)) = (-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}) = (-\sin t, \cos t)$.
Si calcola

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(b) Stabilire se il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è irrotazionale e/o conservativo.

- Siccome $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \neq 0$ per una curva chiusa γ (quella sopra), $\mathbf{F}$ non è conservativo. D'altra parte, con $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0,\end{aligned}$$

dunque $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iiint_D y^2 z dx dy dz, \quad \text{dove } D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} \leq z^2 \leq 1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}, 0 \leq z \right\}.$$

- La definizione del dominio D si può scrivere come

$$\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}} \leq z \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}}$$

Esistono tali (x, y, z) se e solo se $\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}}$. Equivalentemente

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} &\leq 1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\leq 4.\end{aligned}$$

Quindi possiamo rappresentare D come

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, \sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}} \leq z \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}} \right\}$$

Così D è normale rispetto al piano xy .

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}\iiint_D y^2 z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y^2 dx dy \int_{\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}}} z dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y^2 dx dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}}} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \sin \theta)^2 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \left(r^3 - \frac{r^5}{4} \right) dr d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24} \right]_0^2 \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

5. (6 punti)

(a) Per il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{x^2+y^2+z^2}, ye^{x^2+y^2+z^2}, ze^{x^2+y^2+z^2})$, calcolare $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

• Si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{x^2+y^2+z^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{x^2+y^2+z^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(ze^{x^2+y^2+z^2}) \\
&= (e^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2e^{x^2+y^2+z^2}) + (e^{x^2+y^2+z^2} + 2y^2e^{x^2+y^2+z^2}) \\
&\quad + (e^{x^2+y^2+z^2} + 2z^2e^{x^2+y^2+z^2}) \\
&= (3 + 2(x^2 + y^2 + z^2))e^{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

(b) Scrivere il seguente integrale di volume come un integrale di superficie di un campo vettoriale (il flusso uscente) usando il teorema della divergenza (Gauss) e determinare il valore (suggerimento: paragonare G con la risposta alla domanda precedente).

$$\begin{aligned}
&\iiint_D G(x, y, z) dx dy dz, \quad G(x, y, z) = (3 + 2(x^2 + y^2 + z^2))e^{x^2+y^2+z^2}, \\
&D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.
\end{aligned}$$

• Osserviamo che D è la palla di raggio 3 con il centro $(0, 0, 0)$ e il suo bordo è la sfera di raggio 3 con il centro $(0, 0, 0)$: $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$. Visto che $G = \operatorname{div} \mathbf{F}$, per il teorema della divergenza si ha

$$\iiint_D G(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Passiamo alle coordinate sferiche di Σ con la parametrizzazione

$$\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta) = (3 \sin \varphi \cos \theta, 3 \sin \varphi \sin \theta, 3 \cos \varphi), \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

allora si ha $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{\varphi}(\varphi, \theta) &= (3 \cos \varphi \cos \theta, 3 \cos \varphi \sin \theta, -3 \sin \varphi) \\
\boldsymbol{\sigma}_{\theta}(\varphi, \theta) &= (-3 \sin \varphi \sin \theta, 3 \sin \varphi \cos \theta, 0) \\
\boldsymbol{\sigma}_{\varphi} \times \boldsymbol{\sigma}_{\theta} &= 9 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)
\end{aligned}$$

Con $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta)) = 3e^9(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$, si continua:

$$\begin{aligned}
\iiint_D G(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta)) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\varphi} \times \boldsymbol{\sigma}_{\theta} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 27e^9 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
&= 108e^9 \pi
\end{aligned}$$