

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.09.02

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando le risposte (le risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

- (a) Scrivere l'enunciato del criterio del confronto (che riguarda la convergenza e divergenza di due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, con $a_n \leq b_n$), specificando tutti gli oggetti e le proprietà che appaiono.
- (b) Stabilire se la seguente serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^3 \log n + 4n + 2}$$

- (c) Stabilire se la seguente successione converge puntualmente e/o uniformemente su $[0, 1]$ per $n \rightarrow \infty$.

$$f_n(x) = n^2 x e^{-xn}$$

2. (10 punti)

- (a) Dare una funzione continua f su $\mathbb{R}^2$ che ammetta un punto di minimo globale.
- (b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione su $\mathbb{R}^2$ e stabilire se ognuno di essi è un punto di minimo locale, di massimo locale o di sella. Stabilire se alcuni di essi sono punti di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = 3x^3 + 4y^3 - x - 3y$$

- (c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y) = x^3 \quad \text{vincolati all'insieme} \quad E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

e discutere se essi sono punti di minimo o massimo globali.

3. (6 punti)

- (a) Sia γ una parametrizzazione del cerchio C di raggio 1 con centro in $(0, 0)$ che comincia dal punto $(1, 0)$ e va in senso antiorario. Trovare una tale γ .
Calcolare il seguente integrale di linea, con γ sopra e $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

- (b) Stabilire se il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è irrotazionale e/o conservativo.

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iiint_D y^2 z dx dy dz, \quad \text{dove } D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} \leq z^2 \leq 1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}, 0 \leq z \right\}.$$

5. (6 punti)

- (a) Per il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{x^2+y^2+z^2}, ye^{x^2+y^2+z^2}, ze^{x^2+y^2+z^2})$, calcolare $\text{div } \mathbf{F}$.
- (b) Scrivere il seguente integrale di volume come un integrale di superficie di un campo vettoriale (il flusso uscente) usando il teorema della divergenza (Gauss) e determinare il valore (suggerimento: paragonare G con la risposta alla domanda precedente).

$$\iiint_D G(x, y, z) dx dy dz, \quad G(x, y, z) = (3 + 2(x^2 + y^2 + z^2))e^{x^2+y^2+z^2},$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$