

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.07.13

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando le risposte (le risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

(a) Scrivere l'enunciato del criterio di Leibniz (che riguarda la convergenza di una serie alternata), specificando tutti gli oggetti e le proprietà che appaiono.

- Sia $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ una successione di numeri non negativi ($a_n \geq 0$).
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge se
 - a_n è decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$)
 - $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

(b) Stabilire se la seguente serie converge, e se converge assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^3+1} (-1)^n.$$

- Questa è una serie alternata con $a_n = \frac{n^2}{3n^3+1}$. Infatti $a_n \geq 0$. Per applicare il criterio di Leibniz, verifichiamo le condizioni.
 - a_n è decrescente, infatti

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{3(n+1)^3+1} - \frac{n^2}{3n^3+1} \\ &= \frac{(n+1)^2(3n^3+1) - n^2(3(n+1)^3+1)}{(3(n+1)^3+1)(3n^3+1)} \\ &= \frac{(n^2+2n+1)(3n^3+1) - n^2(3n^3+9n^2+9n+4)}{(3(n+1)^3+1)(3n^3+1)} \\ &= \frac{-3n^4 - 6n^3 - 3n^2 + 2n + 1}{(3(n+1)^3+1)(3n^3+1)} \\ &\leq 0 \text{ (siccome } n \geq 1). \end{aligned}$$

$$- \frac{n^2}{3n^3+1} = \frac{1}{3n+\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Dunque per il criterio di Leibniz, la serie converge.

- Per la convergenza assoluta, si considera $\sum_n \frac{n^2}{3n^3+1}$. Per applicare il confronto asintotico, si prende $b_n = \frac{1}{n}$. Sappiamo che $\sum_n b_n$ diverge. D'altra parte, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^2}{3n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3}{3n^3+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{3}$ per $n \rightarrow \infty$. Siccome $\frac{1}{3} > 0$, per il confronto asintotico, la serie $\sum_n \frac{n^2}{3n^3+1}$ diverge, ossia la serie originale (alternata) non converge assolutamente.

(c) Determinare il raggio di convergenza della seguente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^{n^2}}{n^{n^2}} x^n$$

- Si applica il criterio della radice, ponendo $a_n = \frac{(2+n)^{n^2}}{n^{n^2}} |x|^n$. Allora,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^n}{n^n} |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} + 1 \right)^n |x| \\ &= e^2 |x| \end{aligned}$$

Dunque per il criterio della radice, la serie di potenze converge se $e^2|x| < 1$ e diverge se $e^2|x| > 1$, ossia se $|x| < e^{-2}$ e diverge se $|x| > e^{-2}$. Dunque per la definizione, il raggio di convergenza è e^{-2} .

2. (10 punti)

(a) Dare una funzione f che ammetta un punto di massimo globale che non sia un punto critico.

- Sia $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$. Per il punto $(1, 1)$ vale che $f(1, 1) = 2$ è il valore massimo sul dominio, ma non è un punto critico nel senso usuale per funzioni definite su aperti: $(1, 1)$ si trova al bordo del dominio e dunque non ammette derivate parziali (solo derivate parziali a sinistra). Pur estendendo la stessa formula a $\mathbb{R}^2$, si ha $\nabla f(x, y) = (1, 1) \neq (0, 0)$.

(b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione su $\mathbb{R}^2$ e stabilire se ognuno di essi è un punto di minimo locale, di massimo locale o di sella. Stabilire se alcuni di essi sono punti di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = e^{x^3+y^3+3xy}$$

- La funzione è differenziabile su tutti i punti del dominio $\mathbb{R}^2$, e dunque basta trovare i punti critici e studiarne la natura. Per un punto critico (x_0, y_0) di f , vale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0^3+y_0^3+3x_0y_0}(3x_0^2+3y_0) \\ e^{x_0^3+y_0^3+3x_0y_0}(3y_0^2+3x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque $e^{x_0^3+y_0^3+3x_0y_0}(3x_0^2+3y_0) = 0$, $e^{x_0^3+y_0^3+3x_0y_0}(3y_0^2+3x_0) = 0$. Siccome vale che $e^{x_0^3+y_0^3+3x_0y_0} \neq 0$, si ha $3x_0^2+3y_0 = 0$, $3y_0^2+3x_0 = 0$.

Risolvendo queste equazioni, i punti critici sono $(0, 0), (-1, -1)$. Corrispondentemente, $f(0, 0) = 1$, $f(-1, -1) = e$.

Inoltre,

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= e^{x^3+y^3+3xy} \begin{pmatrix} 9x^4+18x^2y+9y^2+6x & 9(x^2y^2+x^3+y^3+xy)+3 \\ 9(x^2y^2+x^3+y^3+xy)+3 & 9y^4+18xy^2+9x^2+6y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dunque, per i punti critici sopra, le matrici Hessiane sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

che hanno autovalori con segni misti e due autovalori negativi rispettivamente. Si conclude che $(0, 0)$ è un punto di sella, mentre $(-1, -1)$ è un punto di massimo locale. Non ci sono punti di massimo globali, poiché $f(x, 0) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$. Dunque il punto $(-1, -1)$ non è un punto di massimo globale.

(c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{vincolati all'insieme} \quad E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$$

e discutere se essi sono punti di minimo o massimo globali.

- Si pone $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. $\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ su E .

Si nota che $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$. Per il metodo di moltiplicatori di Lagrange, se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 + y_0 + z_0 = 1.$$

Dunque $2x_0 = \lambda, 2y_0 = \lambda, 2z_0 = \lambda$, da cui segue che $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{3}{2}\lambda$. Con il vincolo, si ottiene che $\lambda = \frac{2}{3}$ e dunque $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{3}$. Per determinare se si tratta di un punto di minimo o di massimo, si nota che il vincolo $x + y + z = 1$ rappresenta un piano con vettore normale $(1, 1, 1)$, mentre $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ è il quadrato della distanza tra i punti $(0, 0, 0)$ e (x, y, z) . Dunque, scrivendo $(x, y, z) = (x', y', z') + (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, con $x' + y' + z' = 0$, si ha $x^2 + y^2 + z^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}$. Così si conclude che il punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è un punto di minimo globale su E .

3. (6 punti)

(a) Stabilire se il seguente campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ è irrotazionale e/o conservativo.

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos(xe^y) - x^2 e^y \sin(xe^y), -x^3 e^y \sin(xe^y))$$

- Si osserva

$$\begin{aligned} \partial_y F_1 &= -2x^2 e^y \sin(xe^y) - x^2 e^y \sin(xe^y) - x^3 e^{2y} \cos(xe^y), \\ \partial_x F_2 &= -3x^2 e^y \sin(xe^y) - x^3 e^{2y} \cos(xe^y), \end{aligned}$$

dunque $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, ossia $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Calcolando $\int (-x^3 e^y \sin(xe^y)) dy = x^2 \cos(xe^y) + c(x)$ e derivando rispetto a x , si trova $c'(x) = 0$; dunque $f(x, y) = x^2 \cos(xe^y)$ è una funzione potenziale di $\mathbf{F}$. Ossia $\mathbf{F}$ è conservativo.

- (b) Sia γ una parametrizzazione del cerchio C di raggio 3 con centro in $(0,0)$ che comincia dal punto $(3,0)$ e va in senso orario. Trovare una tale γ .

Scrivere (**non calcolare e non c'è neanche bisogno di espandere o semplificare**) il seguente integrale di linea come un integrale di una funzione esplicita dove $\mathbf{F}$ e γ sono quelli sopra. Dopodichè determinare il valore.

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

- Si può prendere, per esempio, $\gamma(t) = (3 \cos(-t), 3 \sin(-t)), t \in [0, 2\pi]$. Si ha $\gamma'(t) = (3 \sin(-t), -3 \cos(-t))$ e, per definizione di integrale di linea,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(6 \cos(-t) \cos(3 \cos(-t)) e^{3 \sin(-t)} \right. \\ &\quad \left. - 9 \cos^2(-t) e^{3 \sin(-t)} \sin(3 \cos(-t)) e^{3 \sin(-t)}) 3 \sin(-t) \right. \\ &\quad \left. + (-27 \cos^3(-t) e^{3 \sin(-t)} \sin(3 \cos(-t)) e^{3 \sin(-t)}) (-3 \cos(-t)) \right] dt. \end{aligned}$$

D'altra parte, siccome il campo vettoriale è conservativo e γ è chiusa, detta f una funzione potenziale si ha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$.

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\},$$

usando il cambio di variabili $u = x+y, v = x-y$ e indicando la regione Ω che corrisponde a D nelle coordinate uv (suggerimento: scrivere Ω come un dominio normale rispetto ad u)

- Con il cambio di variabili $u = x+y, v = x-y$, vale che $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Le condizioni $0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1$ si traducono in $0 \leq \frac{u+v}{2}, 0 \leq \frac{u-v}{2}, u \leq 1$, rispettivamente. Dunque il dominio D nelle coordinate xy corrisponde al dominio

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{u+v}{2}, 0 \leq \frac{u-v}{2}, u \leq 1\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -u \leq v, v \leq u, u \leq 1\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 1], -u \leq v \leq u\}, \end{aligned}$$

che è un dominio normale rispetto ad u .

La matrice Jacobiana è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, e il suo determinante è $-\frac{1}{2}$.

Il valore dell'integranda nel punto $(0,0)$, dove l'espressione non è definita, può essere assegnato arbitrariamente senza modificare l'integrale.

Usando la formula di cambio di variabili, abbiamo

$$\iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \iint_{\Omega} \exp\left(\frac{v}{u}\right) \frac{1}{2} dv du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^u \exp\left(\frac{v}{u}\right) dv du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[u \exp\left(\frac{v}{u}\right) \right]_{-u}^u du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 u(e - e^{-1}) du \\
&= \frac{e - e^{-1}}{2} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{e - e^{-1}}{4}.
\end{aligned}$$

5. (6 punti) Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2z, yz^2)$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$, Σ la superficie del cilindro:

$$\Sigma := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2, 0 \leq z \leq 2\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2, z \in \{0, 2\}\}.$$

Sia $\mathbf{N}_e$ il versore normale esterno in ogni punto regolare di Σ .

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_e dS.$$

- Per il teorema di divergenza (di Gauss), l'integrale di superficie (di flusso) coincide con

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz$$

dove $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ (la regione circondata dalla superficie Σ).

Si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2 + 2yz.$$

Per eseguire l'integrale di volume, si può passare alle coordinate cilindriche:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z.$$

La regione Q che corrisponde a V nelle coordinate cilindriche è $Q = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$.

Si ricorda che il determinante della matrice Jacobiana per le coordinate cilindriche è r , Pertanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_e dS &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \\
&= \iiint_Q (r^2 \sin^2 \theta + 2rz \sin \theta) r d\theta dr dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (r^3 \sin^2 \theta + 2r^2 z \sin \theta) d\theta \right) dr \right) dz \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \right) dr \right) dz \\
&= 2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

dove nel passaggio alla quarta riga si è usato $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$.