

Ingegneria gestionale – a. a. 2025/26
Prova scritta per il corso di Analisi Matematica II
2026.06.26

Cognome: Nome:
Matricola:

Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (risposte non motivate valgono 0 punti).

1. (6 punti)

- (a) Scrivere l'enunciato del criterio del rapporto, specificando tutti gli oggetti e le proprietà che appaiono.
- Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri **positivi**. Supponiamo che il limite dei rapporti $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ esista (in $\mathbb{R}$).
 - Se $L < 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge.
 - Se $L > 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.
- (b) Stabilire, al variare di $x \in \mathbb{R}$, se la seguente serie converge, e se converge assolutamente, spiegando come si applica il criterio del rapporto.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{\sqrt{n!}} (x - 1)^n.$$

- Sia $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, e poniamo $a_n = \frac{3^n + 1}{\sqrt{n!}} |x - 1|^n$.
 - Se $x = 1$, $a_n = 0$ dunque la serie converge (a 0).
 - Se $x \neq 1$, $a_n > 0$ e possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} + 1}{\sqrt{(n+1)!}} |x - 1|^{n+1}}{\frac{3^n + 1}{\sqrt{n!}} |x - 1|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} |x - 1|}{\sqrt{n+1}} \\ &= 0 < 1. \end{aligned}$$

(si nota che $\frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} < 3$, mentre $\sqrt{n+1} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$) Dunque per il criterio del rapporto, la serie converge assolutamente per tutti $x \in \mathbb{R}$. Siccome la serie converge assolutamente, converge anche semplicemente.

- (c) Stabilire se la seguente successione converge puntualmente su $[-2, 2]$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} x^k.$$

Scrivere $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ (se esiste). Trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(2) - f(2)| < \frac{1}{2}$ per tutti $n \in \mathbb{N}, n > N$.

- Per ogni $x \in [-2, 2]$, la somma è una serie geometrica, e vale

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} x^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{3}}.$$

Siccome $x \in [-2, 2]$, $|\frac{x}{3}| < 1$ e dunque $(\frac{x}{3})^{n+1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e si ha $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{x}{3})^{n+1}}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$.

Per il caso specifico di $x = 2$, $f_n(2) - f(2) = \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \cdot (\frac{2}{3})^{n+1}$. Vale $3 \cdot (\frac{2}{3})^{n+1} < \frac{1}{2}$ se $n \geq 4$ (infatti se $n = 4$, $3 \cdot (\frac{2}{3})^5 = \frac{96}{243} < \frac{1}{2}$, e la successione è monotonicamente decrescente). Dunque si può prendere $N = 3$.

2. (10 punti)

- (a) Dare una funzione f sul dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ che non ammetta un punto di massimo globale.

- Per esempio si può prendere $f(x, y) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$. Allora vale che $f(x, y) < 1$ per tutti $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, e per ogni (x, y) con $x < 1$, $(\frac{x+1}{2}, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e vale $f(x, y) = x < \frac{x+1}{2} = f(\frac{x+1}{2}, y)$ dunque (x, y) non può essere un punto di massimo globale. Neanche $(1, y)$ perché $f(1, y) = 0 < f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{2}$. (Bisogna prendere una funzione f non continua, altrimenti si applicherebbe il teorema di Weierstrass)

- (b) Trovare tutti i punti critici della seguente funzione e stabilire se ognuno di essi è un punto di minimo locale, massimo locale o di sella. Stabilire se alcuni di loro sono punti di minimo o massimo globali.

$$f(x, y) = e^x(xy - y^2 - 2)$$

- La funzione è differenziabile su tutti i punti del dominio $\mathbb{R}^2$, e dunque basta trovare i punti critici e studiarne la natura. Per un punto critico (x_0, y_0) di f , vale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0}(x_0 y_0 - y_0^2 - 2 + y_0) \\ e^{x_0}(x_0 - 2y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dunque $e^{x_0}(x_0 y_0 - y_0^2 - 2 + y_0) = 0$, $e^{x_0}(x_0 - 2y_0) = 0$. Siccome $e^{x_0} \neq 0$, si ha $x_0 y_0 - y_0^2 - 2 + y_0 = 0$, $x_0 - 2y_0 = 0$.

Risolvendo queste equazioni, i punti critici sono $(2, 1), (-4, -2)$. Corrispondentemente, $f(2, 1) = -e^2$, $f(-4, -2) = 2e^{-4}$.

Inoltre,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(xy - y^2 - 2 + 2y) & e^x(x - 2y + 1) \\ e^x(x - 2y + 1) & e^x(-2) \end{pmatrix},$$

dunque, per i punti critici sopra, le matrici Hessiane sono

$$e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, e^{-4} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che hanno autovalori con segni misti e due autovalori negativi rispettivamente. Dunque $(2, 1)$ è un punto di sella, mentre $(-4, -2)$ è un punto di massimo locale.

Non ci sono punti di minimo o massimo globali. Infatti, per esempio, $f(x, 1) = e^x(x-3) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow \infty$, quindi f non è limitata superiormente, e $(-4, -2)$ non può essere un massimo globale.

(c) Trovare i punti di minimo e massimo locali della funzione

$$f(x, y) = x - y \quad \text{vincolati all'insieme} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 1\}$$

e discutere se sono punti di minimo o massimo globali.

- Si pone $g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 1$. $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 6y \end{pmatrix}$, dunque $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ su E .

Si nota che $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per il metodo di moltiplicatori di Lagrange, se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x_0 \\ 6y_0 \end{pmatrix}, \quad 2x_0^2 + 3y_0^2 = 1.$$

Dai componenti della prima equazione, risulta che $\lambda \neq 0$ e $x_0 = \frac{1}{4\lambda}$, $y_0 = -\frac{1}{6\lambda}$. Dalla seconda equazione, $\frac{2}{(4\lambda)^2} + \frac{3}{(6\lambda)^2} = 1$, da qui segue che $\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{24}}$.

– Con $\lambda = \sqrt{\frac{5}{24}}$, si ha $(x_0, y_0) = (\sqrt{\frac{3}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{15}})$.

– Con $\lambda = -\sqrt{\frac{5}{24}}$, si ha $(x_0, y_0) = (-\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{2}{15}})$.

Per determinare se si tratta di un punto di minimo o di massimo, si osserva che

$$- f(\sqrt{\frac{3}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}) = \sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{2}{15}} > 0,$$

$$- f(-\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{2}{15}}) = -\sqrt{\frac{3}{10}} - \sqrt{\frac{2}{15}} < 0.$$

Inoltre E è un insieme chiuso (perché definito come l'insieme di zeri di una funzione continua g) e limitato (perché se (x, y) è lontano da $(0, 0)$, $2x^2 + 3y^2$ diventa grande e diverso da 1). Quindi E è compatto e, per il teorema di Weierstrass, f ammette sia un massimo globale sia un minimo globale su E . Conseguentemente,

– $(\sqrt{\frac{3}{10}}, -\sqrt{\frac{2}{15}})$ è un punto di massimo globale,

– $(-\sqrt{\frac{3}{10}}, \sqrt{\frac{2}{15}})$ è un punto di minimo globale.

3. (6 punti) Sia $f(x, y) = y \cos(x^2 e^y)$.

(a) Calcolare $\mathbf{F} = \nabla f$. Stabilire se $\mathbf{F}$ è irrotazionale o no.

- Si calcola

$$\nabla f(x, y) = (-2xye^y \sin(x^2 e^y), \cos(x^2 e^y) - x^2 e^y y \sin(x^2 e^y)).$$

Siccome f è differenziabile infinite volte, vale che $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$, e dunque $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

(b) Trovare una parametrizzazione γ della parte C dell'iperbole $x^2 - y^2 = 3$, $x > 0$, che parte da $(2, -1)$ e finisce in $(2, 1)$, e scrivere $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ usando la definizione dell'integrale di linea (senza calcolare).

- Per esempio, l'equazione si può scrivere come $x = \sqrt{y^2 + 3}$ (così soddisfa anche la condizione $x > 0$). Per variare la coordinata y da -1 a 1 , possiamo identificare y come t e prendere $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 3}, t), t \in [-1, 1]$.
- Per definizione, l'integrale di linea è, con

$$\begin{aligned}\nabla f(\gamma(t)) &= (-2\sqrt{t^2 + 3}e^t \sin((t^2 + 3)e^t), \cos((t^2 + 3)e^t) - (t^2 + 3)e^t t \sin((t^2 + 3)e^t)) \\ \gamma'(t) &= (t/\sqrt{t^2 + 3}, 1),\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (-2t^2 e^t \sin((t^2 + 3)e^t) + \cos((t^2 + 3)e^t) - (t^2 + 3)e^t t \sin((t^2 + 3)e^t)) dt\end{aligned}$$

(c) Determinare il valore di $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$.

- Siccome $\mathbf{F} = \nabla f$ è conservativo, si ha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{x} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(-1)) = \cos(4e) + \cos(4e^{-1}).$$

4. (6 punti) Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + (z - 2)^2) dx dy dz, \quad \text{dove } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

- Conviene passare alle coordinate sferiche $(x, y, z) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$, con il determinante della matrice Jacobiana $r^2 \sin \varphi$. Il dominio corrisponde a $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Dunque, osservando che $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = r^2 - 4r \cos \varphi + 4$,

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2 + y^2 + (z - 2)^2) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (r^2 - 4r \cos \varphi + 4) r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - 4r \cos \varphi + 4) r^2 \sin \varphi d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_1^0 (r^2 - 4rt + 4) r^2 (-dt) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 [r^2 t - 2rt^2 + 4t]_0^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^2 - 2r + 4) r^2 dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^4}{2} + \frac{4r^3}{3} \right]_0^1\end{aligned}$$

$$= \frac{31\pi}{15}.$$

dove nel terzo passaggio abbiamo cambiato le variabili $t = \cos \varphi$, $dt = -\sin \varphi d\varphi$

5. (6 punti) Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{zy^2}, e^{yx^2}, e^{xz^2})$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$, C il bordo del quadrato con i vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$.

(a) Dare una parametrizzazione γ di C che va in senso antiorario sul piano xy .

- Per esempio, possiamo prendere

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, 0) & t \in [0, 1] \\ (1, t - 1, 0) & t \in [1, 2] \\ (1 - (t - 2), 1, 0) & t \in [2, 3] \\ (0, 1 - (t - 3), 0) & t \in [3, 4] \end{cases}$$

(b) Determinare il valore del seguente integrale di linea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

- C è il bordo del quadrato $D = \{(x, y, 0) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^3$. Per il teorema di rotore, si ha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, dove $\mathbf{n}$ è il versore con la coordinata z positiva.

Si ha

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0, \\ y^2 e^{zy^2} - z^2 e^{xz^2}, \\ 2xy e^{yx^2} - 2yz e^{zy^2} \end{pmatrix}$$

Mentre possiamo parametrizzare D con $\sigma(u, v) = (u, v, 0)$ su $\Omega = \{(u, v) : u \in [0, 1], v \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$, e $\sigma_u = (1, 0, 0)$, $\sigma_v = (0, 1, 0)$, $\sigma_u \times \sigma_v = (0, 0, 1)$ che ha la coordinata z positiva.

Dunque, con $\text{rot } \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \times \sigma_v = (0, v^2, 2uve^{vu^2}) \cdot (0, 0, 1) = 2uve^{vu^2}$,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{F}(\sigma(u, v)) \cdot (0, 0, 1) du dv \\ &= \int_{\Omega} 2uve^{vu^2} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2uve^{vu^2} du dv \\ &= \int_0^1 [e^{vu^2}]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 (e^v - 1) dv \\ &= [e^v - v]_0^1 = (e - 1) - (1 - 0) = e - 2. \end{aligned}$$