

Analisi matematica II, 2025/26 Primo semestre

Yoh Tanimoto

Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
Via della Ricerca Scientifica 1, I-00133 Roma, Italy
email: hoyt@mat.uniroma2.it

Serie numeriche, serie di funzioni

1. Calcolare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$.

Soluzione. Si ha $\sum_{k=1}^n a^k = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a-a^{n+1}}{1-a}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 3 \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 3 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1$$

Si nota: $\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

2. Calcolare la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. (suggerimento: scrivere $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1})$ e considerarla come una serie telescopica)
3. Calcolare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. (suggerimento: scrivere $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$ e considerarla come una serie telescopica)
4. Calcolare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n!}$. (suggerimento: scrivere $\frac{1+n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)!}$ e scrivere la somma nella forma $\sum_{n=0}^{\infty}$ invece di $\sum_{n=1}^{\infty}$)
5. Dire se la serie $\sum_n \frac{n}{n^2+1}$ converge. (suggerimento: confrontare con $\sum_n \frac{1}{n}$)
6. Dire se $\sum_n \frac{2^n+3^n}{5^n}$ converge. (suggerimento: usare il criterio di rapporto)
7. Dire se $\sum_n \frac{\log n}{n^2}$ converge. (suggerimento: confrontare con $\sum_n \frac{1}{n^{1.5}}$)
8. Dire se $\sum_n \frac{1}{(\log n)^2}$ converge. (suggerimento: confrontare con $\sum_n \frac{1}{n}$)
9. Dire se $\sum_n \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ converge. (suggerimento: applicare il criterio di Leibniz)
10. Dire se $\sum_n \frac{(-1)^n}{n \log n}$ converge. (suggerimento: applicare il criterio di Leibniz)
11. Dire se $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$ converge. (suggerimento: scrivere il fattore come $\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(n+2)-(n+1)}$)
12. Dire per quali x , $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^x+1}}$ converge. (suggerimento: confronto (asintotico) con $\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}}$)
13. Dire per quali x , $\sum_n \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$ converge. (suggerimento: se $|x| \geq 1$, calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$. se $|x| < 1$, confrontare con x^{2n})

14. Dire per quali x , $\sum_n \frac{n^2 x^{2n}}{(2n)!}$ converge. (suggerimento: usare il criterio del rapporto e il fatto che la convergenza assoluta implica la convergenza semplice)
15. Dire per quali x , $\sum_n \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge. (suggerimento: considerare i casi $|x| < 1, = 1, > 1$)
16. (a) Studiare la convergenza puntuale/uniforme di $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$
(suggerimento: considerare i punti $x_n = 1/\sqrt{n}$).
(b) Dimostrare che $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{3^k}$, $x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente.
(suggerimento: prendere il valore assoluto e applicare il criterio del rapporto).
(c) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^s x^n dx$ per $s \in [0, 1]$.
(suggerimento: calcolare prima l'integrale, e dopo il limite).
17. Poniamo $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ per $n = 1, 2, \dots$ e $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

(suggerimento: per calcolare l'integrale, fare una sostituzione. per il lato destro, studiare la convergenza puntuale).

18. Poniamo $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$.
(suggerimento: calcolare separatamente, con attenzione all'ordine dei limiti). Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \neq f'(x)$.
19. Studiare la convergenza per $n \rightarrow \infty$, di $f_n(x) := \sin(x + 2\pi\sqrt{n^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
(suggerimento: calcolare prima $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$).

20. Determinare il raggio di convergenza.

(suggerimento: la formula del Teorema 3.59 del testo Epsilon 1)

- (a) $\sum \frac{z^n}{2^n}$
(b) $\sum \frac{z^{2n}}{(n+1)2^n}$
(c) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} z^n}{2n}$
(d) $\sum (1 - (-2)^n) z^n$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

21. Dimostrare l'espansione (suggerimento: integrale termini per termini).

- (a) $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ per $|x| < 1$ e $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$.
(b) $\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ per $|x| < 1$ e $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

22. Determinare il raggio di convergenza e calcolare la somma. (suggerimento: ridurre a una serie geometrica)

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}}$.
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

23. Dimostrare l'espansione. (suggerimento: calcolare la serie di Taylor e dimostrare che il residuo tende a 0)

- (a) Con $a > 0$, $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$ for $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, dove $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
24. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ e 0 per $x \leq 0$. Dimostrare che $f^{(n)}(0) = 0$, dunque la serie di Taylor non converge a $f(x)$. (suggerimento: verificare che ogni derivata in $x > 0$ è $e^{-\frac{1}{x}}$ moltiplicato con una funzione razionale, e dunque tende a 0 quando $x \rightarrow 0$)

Topologia in \mathbb{R}^n e continuità

- I seguenti insiemi sono aperti o chiusi in \mathbb{R}^2 ?
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (aperto, non chiuso)
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}$ (non aperto, chiuso)
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 1\}$ (né aperto, né chiuso)
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 < 1, |x| \leq 2\}$ (aperto, non chiuso)
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \operatorname{sgn} x\}$, dove $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. (né aperto, né chiuso)
- Determinare il dominio naturale della seguente funzione e se è continua (suggerimento: funzioni composte di funzioni continue sono continue)
 - $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
 - $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$
- Sia $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ per (x, y) tale che $x + y \neq 0$. Dimostrare che f non ha limite $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
(suggerimento: prendere le successioni $\mathbf{x}^{(k)} = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ e $(\frac{1}{k}, 0)$)
- Siano A, B insiemi aperti. Dimostrare che $A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti.

Partial derivatives, regola di catena

- Calcolare il gradiente.
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$.
 - $f(x, y) = e^x \cos y$.
 - $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.
 - $f(x, y, z) = x^{y^z}$ per $x, y, z > 0$.
- Calcolare la derivata direzionale. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ in $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ nella direzione $(1, -1, 2)$.
- Verificare che $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ per la funzione seguente. $f(x, y) = e^{x^2+y}(x + y^2)$.
- Calcolare la derivata della funzione composta $f(\mathbf{a}(t))$.
 - $f(x, y) = x^2 + y^2, \mathbf{a}(t) = (t, t^2)$.
 - $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy^2), \mathbf{a}(t) = (\cos t, \sin t)$.
- Calcolare la derivata della funzione seguente di x :

- (a) $f(x) = x^{x^x}$ for $x > 0$. (suggerimento: scrivere $f(x) = g(\gamma(x))$, $g(x, y, z) = x^{y^z}$, $\gamma(x) = (x, x, x)$ e applicare la regola di catena)
- (b) $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2} dt$. (suggerimento: scrivere $f(x) = g(\gamma(x))$, $g(x, y) = \int_y^x e^{t^2} dt$, $\gamma(x) = (x^2, -x^2)$ e applicare la regola di catena e il teorema fondamentale di calcolo)
6. Trovare una parametrizzazione $\mathbf{a}(t)$ per la curva $x^2 - y^2 = 1$ e calcolare la linea tangente a $\mathbf{a}(t)$ per un t fisso. (suggerimento: usare la relazione $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$)
7. Trovare un'equazione per la linea tangente a $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e $z = e^{x-y}$ in $(1, 1, 1)$. (suggerimento: usare il fatto che la linea tangente è ortogonale al gradiente)
8. Sia $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$. Dimostrare che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ esiste (u, v) che soddisfa queste equazioni. Scriverlo come $u = U(x, y)$, $v = V(x, y)$. Dimostrare che $\nabla U(x, y)$ e $\nabla V(x, y)$ sono ortogonali.

Punti critici e derivate di ordine superiore

1. Trovare tutti i punti critici delle seguenti funzioni. (suggerimento: risolvere le equazioni $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ allo stesso tempo)
- (a) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
- (b) $f(x, y) = x^3 - xy^2 - 2y^2 - 3x + 2$
- (c) $f(x, y) = xy^3 + 3x^2 + 4y^2$
- (d) $f(x, y) = e^x(x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y)$
- (e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - xz + 3yz - 3x + 4z + 5$
2. Determinare la matrice hessiana delle seguenti funzioni.
- (a) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy - z^2 + 3yz$
- (b) $f(x, y, z, w) = 2xy^2 + 3y^2w + xyz - yzw - 1$

3. Per la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

discutere quale ipotesi del teorema di Schwarz non è soddisfatta.

4. Scrivere i polinomi di Taylor del secondo grado che approssimano le seguenti funzioni intorno al punto indicato.
- (a) $f(x, y) = xe^{x+y}$, $(0, 1)$.
- (b) $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + 3yz^2$, $(1, 1, 1)$.
5. Siano $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ numeri distinti e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Vogliamo trovare una retta $f(x) = ax + b$ che approssima meglio i tre punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, nel senso di trovare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ che minimizza

$$E(a, b) = \sum_{j=1}^3 |f(x_j) - y_j|^2.$$

(questo metodo di trovare una retta approssimante si chiama il metodo dei minimi quadrati)

Matrice Hessiana, punti di minimo e massimo, convessità e concavità

1. Determinare il segno dei autovalori delle seguenti matrici

(a) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -3 \end{pmatrix}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. (suggerimento: calcolare la traccia e il determinante)

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (suggerimento: risolvere l'equazione caratteristica)

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (suggerimento: siccome la matrice si decompone a blocchi, considerarli separatamente)

2. Trovare i punti critici delle seguenti funzioni e dire se sono di estremo relativo.

(a) $f(x, y) = xy^2$.

(b) $f(x, y) = y^2 e^{-x^2 - y^2}$.

(c) $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^3}$.

(d) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ (suggerimento: per determinare la natura dei punti critici, invece di usare la matrice Hessiana, osservare i valori della funzione e considerare la proprietà della funzione $\sin \theta$).

3. Date le funzioni, stabilire se $(0, 0)$ è un punto critico, e in caso affermativo, stabilire la natura (massimo/minimo/sella) (suggerimento: la matrice Hessiana è la matrice 0, dunque invece studiare direttamente i comportamenti intorno a $(0, 0)$)

(a) $f(x, y) = x^8 + y^{16} + x^{56}y^{62}$.

(b) $f(x, y) = x^{100} - y^{14} + x^5y^5 - 1$.

4. Stabilire se la seguente funzione è convessa (strettamente) o concava (strettamente) o nessuno di quelli.

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 3x^2 + x^4 + y^6 + -xy + y^2$ (suggerimento: dopo avere calcolato $\det H_f(x, y)$, calcolare il suo minimo).

(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xy$

Funzioni implicite, punti di estremo vincolati, i moltiplicatore di Lagrange

1. Risolvere esplicitamente l'equazione $f(x, y) = 1$ per y , e verificare che la retta tangente nel punto indicato dell'insieme di livello è ortogonale al gradiente.

• $f(x, y) = 2x + y - 1$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

• $f(x, y) = (x + 3)(y - 2)$, $(x_0, y_0) = (-4, 1)$.

2. Determinare i punti di estremo vincolati della funzione f a Γ . Dove possibile, rappresenta Γ come una curva $\gamma(t)$ e trovare i punti di estremo di $f \circ \gamma$, verificando che le soluzioni coincidono.

- (a) $f(x, y) = x^2 + (y - 3)^2$, $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$
 (b) $f(x, y) = \frac{1}{3-xy}$, $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$
 (c) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 2)^2 = x^2 + 4\}$
3. Determinare i punti di estremo vincolati della funzione f a Γ , definito da due vincoli. Dove possibile, rappresenta Γ come una curva $\gamma(t)$ per determinare che i punti (il punto) è un punto di massimo o minimo.
- (a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2$, $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 5y + z - 7 = 0, x + 2y - 3z - 1 = 0\}$ (cf. esempio nel testo). (suggerimento: usare il metodo di Lagrange con due vincoli per trovare un candidato (x_0, y_0, z_0) . Il vincolo è un sistema di equazioni lineari, dunque Γ è una retta. Trovare un vettore parallelo a quella retta, e scrivere γ che parametrizza Γ come nell'esercizio svolto durante la lezione. Valutando $f(\gamma(t))$ (basta valutare i termini t^2) e determinare se il punto è un punto di minimo o massimo.)

Integrali curvilinei, campi vettoriali, integrali di linea

1. Siano $\gamma : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $\tilde{\gamma} : [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$. Dimostrare che γ e $\tilde{\gamma}$ sono equivalenti (trovare $\varphi : [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \rightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tale che $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$).
 Verificare che $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt$, calcolando i due lati separatamente.
2. Calcolare i seguenti integrali curvilinei $\int_{\gamma} f ds$.
- (a) $\gamma : [0, 1], \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), f(x, y, z) = xyz$. (suggerimento: usare la formula per $\sin(2t)$ e integrale per parti).
 (b) $\gamma : [\sinh(-1), \sinh 1], \gamma(t) = (t, \frac{t^2}{2}), f(x, y) = 1$ (suggerimento: usare il cambio di variabile $s = \sinh t$).
3. Calcolare i seguenti integrali curvilinei $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$.
- (a) $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [-1, 1], \mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$.
 (b) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3), t \in [-1, 1], \mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$.
 (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi], \mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.
 (d) $\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}), t \in [-1, 1], \mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ (inoltre paragonare con il risultato dell'esercizio precedente)
 (e) γ : il segmento da $(1, 3, 2)$ a $(2, 1, 1)$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (4, x, -2)$.
4. Determinare se i seguenti campi vettoriali sono conservativi. Se sì, trovare una funzione potenziale. (suggerimento: verificare se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se sì, usare un integrale per costruire una potenziale)
- (a) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{e^x}{e^x+y^2}, \frac{2y}{e^x+y^2} \right)$ su \mathbb{R}^2 .
 (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xy - 2)$ su \mathbb{R}^3 .
 (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ su \mathbb{R}^3 .
5. Determinare, per quali valori di (α, β) , i seguenti campi vettoriali sono conservativi e trovare una funzione potenziale.
- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 4x^3 - 4xy^2, 2y - 4y^3 - \alpha x^2y)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
 (b) $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{y}{1+xy} + \alpha y, \frac{x}{1+xy} + x)$, $\Omega = \{(x, y) : xy > 0\}$.

6. Calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\gamma(t) = (1 - \sin(\pi t^2), \cos(\pi t^2)), t \in [0, 1], \mathbf{F}(y^2, 2xy)$ (suggerimento: trovare una funzione potenziale e usarla invece di calcolare l'integrale)
7. Dimostrare che i campi vettoriali $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-\alpha} \mathbf{x}$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sono conservativi. (suggerimento: se $\alpha \neq 2$, considerare $U(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-\alpha}}{2-\alpha}$. Se $\alpha = 2$, considerare $U(\mathbf{x}) = \log \|\mathbf{x}\|$.)
8. Stabilire se $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{3y^2}{9y^4+x^2}, 2 - \frac{6xy}{9y^4+x^2} \right)$ sulla regione $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ è irrotazionale e conservativo. Se è conservativo, trovare una potenziale. (suggerimento: si nota $(\arctan t)' = \frac{1}{t^2+1}$ e usare sostituzione)
9. Calcolare $g'(0)$, con $g(t) = \int_1^3 \frac{1}{x^2+t} dx$.
10. (mollificatore, veda Osservazione 1.97 del testo) Sia $\rho_a(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-at^2}, f \in C([a, b])$. Definiamo $f * \rho_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \rho_a(t-x) dx$. Dimostrare che $f * \rho_a$ è differenziabile (anche infinite volte). (suggerimento: osservare che, per t in un intervallo chiuso, l'integrale si può prendere in un intervallo)
11. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2, \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 2u + v \\ u - v \end{pmatrix}$. Calcolare $\mathcal{D}(f \circ \Phi)(u, v)$ (la matrice Jacobiana) sia con i conti diretti che con la regola di catena.
12. Sia $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$. Calcolare $\mathcal{D}(\mathbf{f} \circ \Phi)(r, \theta, \varphi)$ sia con i conti diretti che con la regola di catena.

Integrali multipli

1. Calcolare i seguenti integrali multipli $\iint_Q f(x, y) dx dy$.
 - (a) $f(x, y) = xy(x + y), Q = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - (b) $f(x, y) = \sin(x + y), Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (c) $f(x, y) = y^{-3} e^{x/y}, Q = [0, 1] \times [1, 2]$.
2. Calcolare i seguenti integrali multipli.
 - (a) $\iint_{\Omega} (x \sin y - ye^x) dx dy, \Omega = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (b) $\iint_{\Omega} x \cos(x + y) dx dy, \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\}$.
 - (c) $\iint_{\Omega} (x^2 - y^2) dx dy, \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$.
 - (d) $\iint_{\Omega} (3x + y) dx dy, \Omega = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0\}$.
 - (e) $\iint_{\Omega} (y + 2x + 20) dx dy, \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$.
 - (f) $\iint_{\Omega} (xy^2) dx dy, \Omega = \{(x, y) : y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq 2\}$. (suggerimento: determinare gli intersezioni di due curve $y^2 = x, x^2 + y^2 = 2$, notare che Ω è normale rispetto all'asse y)
 - (g) $\iint_D e^{(y-x)/(x+y)} dx dy, D = \{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 2\}$ usando il cambiamento di variabili $x = \frac{1}{2}(v - u), y = \frac{1}{2}(v + u)$. (suggerimento: riscrivere le condizioni che definisce D in termini di u, v , che definisce la regione Ω per u, v)
3. Scrivere i seguenti insiemi come domini normali rispetto all'asse y .
 - (a) $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$.

(b) $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \log x\}$.

4. Trovare il baricentro di Ω .

(a) $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \sin x \leq y \leq \cos x\}$.

(b) $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \log x\}$.

(c) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq z\}$ (semisfera di raggio R), e nel caso di \mathbb{R}^3 , il baricentro si definisce

$$\left(\frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz} \right).$$

(suggerimento: usare le coordinate sferiche. Per i componenti x e y , osservare che l'integrale si annulla per simmetria)

Superfici

1. Trovare una parametrizzazione $\sigma(u, v)$ del cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq 1\}$ (come u, v si possono usare altri simboli più naturali).

2. Calcolare $\sigma_u \times \sigma_v$ per le seguenti parametrizzazioni.

(a) $\sigma(u, v) = (u + v, u - v, 4v^2)$.

(b) $\sigma(u, v) = (a \sin u \cosh v, b \cos u \cosh v, c \sinh v)$.

3. Calcolare l'area.

(a) L'intersezione di $x + y + z = a, x^2 + y^2 \leq a^2$.

Integrale di superficie, teoremi di divergenza e di rotore

1. Sia $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ e $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. Calcolare $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^+ dS$, dove \mathbf{N}^+ viene assegnata dalla parametrizzazione $\sigma(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

2. Sia S un triangolo con le vertici $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ e $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcolare $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^+ dS$, dove \mathbf{N}^+ ha il componente z positivo

3. Calcolare div, curl .

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2)$

4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{zy^2}, e^{yx^2}, e^{xz^2})$, C il bordo del quadrato che ha le quattro vertici $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)$. Calcolare $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$, dove $\boldsymbol{\alpha}$ è una parametrizzazione di C antioraria (sul piano xy). Usare il teorema di rotore e trasformarlo in un integrale di superficie, e verificare che sono uguali.

5. Sia C la curva che parametrizza l'intersezione $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$. Calcolare $\int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$, where $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, scegliendo una direzione di $\boldsymbol{\alpha}$. Usare il teorema di rotore e trasformarlo in un integrale di superficie (scegliendo una superficie), e verificare che sono uguali.

6. Sia S la superficie del cubo $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$, \mathbf{N}_e il versore verso l'esterno di S , $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Calcolare $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_e dS$ e $\iiint_V \text{div } \mathbf{F} dx dy dz$. Verificare che due valori sono uguali per il teorema di divergenza.