AM2 Lezione 1. Presentazione del corso, serie 2025.09.22

Dispense, esercizi: Yoh Tanimoto → Didattica → AM2.
Testo: Epsilon 2 (+ una parte di Epsilon 1) Bertsch, Dall'Aglio, Giacomelli
Ricevimento: su appuntamento (hoyt@mat.uniroma2.it) or Teams (codice: hwdwj8v)

<u>Programma</u> Serie numeriche e di funzioni, Funzioni di più variabili
Integrali multipli, curve e integrali curvilinei, superficie e integrali superficiali.
Applicazioni: serie di Taylor, (serie di Fourier), equazioni differenziale alle derivate parziali (equazioni di Maxwell, Navier-Stokes, Black-Scholes), ottimizzazione, elettrostatistica/dinamica.

In AM1, abbiamo studiato funzioni di una variabile $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Nelle applicazioni concrete, $f(x)$ può essere la posizione di una macchina a tempo x. In tal caso, $f'(x)$ rappresenta la velocità.

In AM2, studieremo funzioni (o a volte chiamate "campi") da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.
Per esempio, se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta un punto nell'aula e $T(x, y, z)$ la temperatura di quel punto, T è una funzione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$.
Nella elettrodinamica si considera il campo elettrico $\mathbb{E}(x, y, z, t)$ a tempo t.
$\mathbb{E} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Impareremo "derivate" ∇T, $\nabla \cdot \mathbb{E}$, $\nabla \times \mathbb{E}$ ...

In AM1, abbiamo studiato successioni numeriche. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Formula di Taylor $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(n)$. $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + o(n)$.
$e \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

<u>Serie numeriche</u> (Epsilon 1 Capitolo 3)
Consideriamo una successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
Allora possiamo costruire una nuova successione $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$.
Simbolicamente, $\sum_{k=1}^{1} a_k, \sum_{k=1}^{2} a_k, \dots \sum_{k=1}^{n} a_k, \dots$

<u>Esempi</u>. $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, \dots a_n = \frac{1}{2^n}$. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.
In questo caso, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

$0.333\dots = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = 3 \cdot \dfrac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} \to 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

Def(inizione) Per una successione $\{a_k\}$, $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ è detta la somma parziale (n-esima) della serie. Se $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ converge, si dice che la serie converge e $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è detta la somma della serie. Se $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \pm\infty$, la serie è detta divergente. Altrimenti "irregolare" o "non convergente".

Oss(ervazione) Si possono considerare serie che cominciano con a_m. $\sum_{k=m}^{n} a_k$. $m=0$.

Serie geometrica.

Sia $r \in \mathbb{R}$ e consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$.

Teo(rema) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ (1) converge se $-1<r<1$ (2) diverge se $r \geq 1$ (3) irregolare se $r \leq -1$

dim(ostrazione)). Sappiamo che $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. (1) Se $-1<r<1$, allora $r^{n+1} \to 0$, dunque $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$. (2) se $r>1$, allora $r^n \to \infty$ e $\sum_{k=0}^{n} r^k \to \infty$. (3) se $r \leq -1$, allora r^{n+1} è irregolare e anche $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$.

Serie telescopiche

Consideriamo la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdots = 1 - \frac{1}{n+1}$. Dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

In generale, una serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ è detta una serie telescopica. Si ha $\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$.

Prop(osizione) Se $\{b_n\}$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

dim). $\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1} \to b_0 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}$.

Prop. (1) Siano $\sum a_k$, $\sum b_k$ convergenti, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} (-a_k) = -\infty$. Se $\lambda > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \infty$.

dim) (1). Per definizione, $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Analogo per $\sum \lambda a_k$.

(2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, allora per ogni $A<0$ esiste N t.c. $\sum_{k=0}^{n} a_k > A$ per $n > N$. Allora $\sum_{k=0}^{n} a_k < A$. Significa che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$.

Oss $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n = a_1 + \cdots a_{m-1} \cdots a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{n} a_k$.

In particolare, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ converge.

Esempio $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 1 = 2$.

AM2 Lezione 2 Serie a termini non negativi 2025.09.23

Per una successione $\{a_n\}$, abbiamo considerato la serie $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$.

<u>Teo</u> Se $\sum_k a_k$ converge, allora $\lim_{n} a_n = 0$.

dim) Sia $\sum_k a_k$ convergente. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N t.c. $|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k| < \varepsilon$ per $m, n > N$. In particolare, se $n > N+1$ allora $m := n-1 > N$ e $|a_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k| < \varepsilon$. Significa che $a_n \to 0$.

<u>Oss</u> Anche se $a_n \to 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ non è detto che converga. Es. $a_n = \frac{1}{n}$.

<u>Serie a termini non negativi</u>

$\sum a_k$ si dice una serie a termini non negativi se $a_n \geq 0$ per tutti $n \in \mathbb{N}$.

<u>Teo</u> Siano $a_n \geq 0$. In questo caso, (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\iff \{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$ è limitata superiormente.
(2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\iff \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k\}$ non è limitata superiormente.

dim) Siccome $a_n \geq 0$, la successione $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è crescente (non decrescente).
Dunque segue (1) (Oss 2100 di Epsilon 1). (2) è simile.

<u>Teo</u> (Criteri del confronto)
Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente per $n \to \infty$. In questo caso,
(1) $\sum_k b_k$ converge $\Rightarrow \sum_k a_k$ converge. (2) $\sum_k a_k$ diverge $\Rightarrow \sum_k b_k$ diverge.

dim) Basta considerare il caso $0 \leq a_n \leq b_n$ per tutti n.
(1) Segue che $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$. Se $\sum_{k=0}^{n} b_k$ converge, è limitata superiormente.
$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_n \leq S$ per tutti n. Per Teo precedente, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ converge.
(2) è analogo.

<u>Esempi</u> $\sum \frac{1}{k^2}$. Si ha che $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$, perché $k(k+1) \leq 2k^2$ per $k \in \mathbb{N}$.
per il teorema del confronto, siccome $\sum \frac{2}{k(k+1)} = 2 \cdot \sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge (telescopico), converge pure $\sum \frac{1}{k^2}$.
Sia $\alpha > 2$. Allora vale $\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k^2}$ per tutti $k \in \mathbb{N}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
dunque per il teorema di confronto, converge pure $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. "Serie armonica generalizzata"

<u>Teo</u> (confronto asintotico)
Siano $0 < a_k, b_k$ definitivamente, e supponiamo $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0$.
In questo caso, $\sum a_k$ converge $\iff \sum b_k$ converge.

dim). Siccome $\ell \neq 0$, si ha $\frac{\ell}{2} < \ell < 2\ell$, e $\frac{\ell}{2} < \frac{a_k}{b_k} < 2\ell$ definitivamente.
Ossia $\frac{\ell}{2} b_k < a_k < 2\ell b_k$. Per confronto, se $\sum a_k$ converge, converge pure $\frac{\ell}{2} \sum b_k$ e ulterior

Teo (Criterio del rapporto).
Sia $a_k > 0$ definitivamente, e $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$. In questo caso,
(1) Se $1 < \ell$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge. (2) Se $\ell < 1$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.
dim) (1) Sia $1 < \ell$. Prendiamo r t.c. $1 < r < \ell$. Allora definitivamente $r < \frac{a_{k+1}}{a_k}$, ovvero $r a_k < a_{k+1}$. Dunque $r^{k-1} a_1 < r^{k-2} a_2 < \cdots < a_k$.
Sappiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} a_1$ diverge. Per il criterio del confronto, diverge $\sum_1 a_k$.
(2) Sia $\ell < 1$. Prendiamo r t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $\frac{a_{k+1}}{a_k} < r$.
Vale che $a_{k+1} < r a_k$, quindi $a_{k+1} < r^k a_1$. Sappiamo che $\sum_1 r^k a_1$ converge.
Per il confronto, converge pure $\sum_1 a_k$.
Oss. Se $\ell = 1$, il criterio non può concludere nulla.
Esempi • Si considera $\sum_1 \frac{1}{k!}$. $a_k = \frac{1}{k!}$ $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} / \frac{1}{k!} = \frac{1}{k+1} \to 0$.
Per il criterio del rapporto, $\sum_1 \frac{1}{k!}$ converge.

Teo (Criterio della radice).
Sia $a_k \geq 0$ definitivamente, e $\lim_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}} = \ell$. In questo caso,
(1) Se $1 < \ell$, allora $\sum a_k$ diverge. (2) Se $\ell < 1$, allora $\sum_1 a_k$ converge.
dim) Dimostriamo (2) ((1) è analogo) Sia $\ell < 1$. Dunque possiamo prendere r t.c. $\ell < r < 1$. Definitivamente $(a_k)^{\frac{1}{k}} < r$, ovvero $a_k < r^k$.
Sappiamo che $\sum_1 r^k$ converge. Per il confronto, converge pure $\sum_1 a_k$.

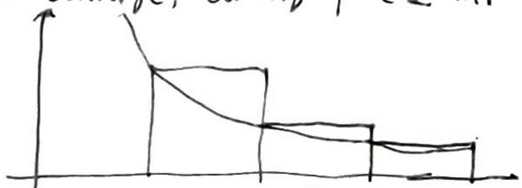
Esempi • $\sum_1 \frac{1}{n 3^n}$ è convergente.
$\sum_1 \frac{n 2^n}{3^n}$ è convergente.
• $\sum_1 \frac{n}{2^n}$ è convergente

Oss. Anche qua, se $\ell = 1$, il criterio non conclude nulla.
Vedremo che $\sum_1 \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ converge, anche se
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

AM2 Lezione 3 Il criterio integrale, esercizi 2025.09.25

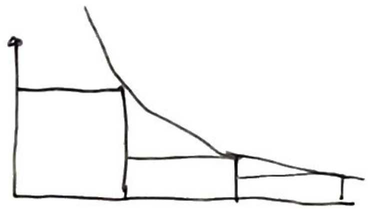
Il criterio integrale

Si ricorda il criterio del confronto per serie a termini non negativi:
Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ (definitivamente). Se $\sum_n b_n$ converge, converge pure $\sum a_n$.
Se diverge $\sum_i a_n$, diverge pure $\sum_i b_n$.



Esempio $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. diverge. Infatti,
$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$. Si prende $a_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$, $b_k = \frac{1}{k}$.
$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{n+1} = (\log(n+1) - 0)$.
Dunque $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$. Per il confronto, diverge pure $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Analogamente, se $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. Infatti, se $\alpha < 1$, allora
$\frac{1}{k} < \frac{1}{k^\alpha}$, dunque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.



D'altra parte, se $\alpha > 1$, allora $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
In questo caso, si nota che $\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx$

Si ha $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx$
$= 1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \frac{1}{1-\alpha}$.
per il confronto, converge pure $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.
(Queste serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ sono dette serie armoniche generalizzate).

Prop. Sia $r \neq 1$. Vale $\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$.

dim). Si dimostra con l'induzione.

caso $n=1$. Il lato sinistro: $\sum_{k=1}^{1} r^k = r$.
Il lato destro: $\frac{r - r^{1+1}}{1-r} = \frac{r(1-r)}{1-r} = r$ ✓.

caso $n+1$. Supponiamo che la formula sia corretta per n.
Dobbiamo dimostrare $\sum_{k=1}^{n+1} r^k = \frac{r - r^{(n+1)+1}}{1-r}$.
Abbiamo $\sum_{k=1}^{n+1} r^k = \sum_{k=1}^{n} r^k + r^{n+1} = \frac{r - r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1}$
$$= \frac{r - r^{n+1} + r^{n+1}(1-r)}{1-r} = \frac{r - r^{n+2}}{1-r} \quad ✓$$

Per l'induzione, la formula è corretta per tutti $n \in \mathbb{N}$.

Esercizi calcolare le somme.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5}{2^n}. \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^4}{\pi^{2n}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Determinare convergenza/divergenza.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n+1}}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}.$$

Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

AM2 Lezione 4 Serie a termini di segno variabile 2025.09.29

Siano $\{a_n\}$ una successione, $a_n \in \mathbb{R}$. Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge **assolutamente** se converge $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

<u>Teo</u> Se $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge pure $\sum a_k$ (nel senso normale). Inoltre, vale $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

dim) Si considera la serie $\sum (|a_k| - a_k)$, che ha i termini non negativi.
Si ha che $|a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, e $\sum 2|a_k| = 2\sum |a_k|$, quella serie converge per il confronto e l'ipotesi.
Vale per ogni n che $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ per la disuguaglianza triangolare.
Entrambe le serie convergono, e dunque vale $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

<u>Esempio</u> $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge perché $\left|\frac{\cos k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$. Sappiamo che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, dunque converge $\sum \left|\frac{\cos k}{k^2}\right|$ per il confronto, e $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ converge per il teorema.

<u>Teo</u> Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (oppure $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$)
Se $\ell < 1$, allora $\sum a_k$ converge assolutamente. Se $1 < \ell$, la serie non converge.
dim). Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ e $\ell < 1$. Si considera la serie $\sum |a_k|$, con i termini non negativi. Per l'ipotesi e il criterio del rapporto, la serie $\sum |a_k|$ converge. Questo significa che la serie $\sum a_k$ converge assolutamente.
Il caso $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ è simile. Se $\ell > 1$, significa che $|a_k| \to \infty$, dunque la serie $\sum a_k$ non può convergere ($a_k \to 0$ è una condizione necessaria).

<u>Esempi</u> • Sia $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
La serie converge assolutamente. Infatti, poniamo $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ per qualunque } x \in \mathbb{R}.$$

Dunque, per il teorema precedente con $\ell = 0 < 1$, la serie converge assolutamente.

• Sia $A > 0$. Consideriamo $\sum \left(\frac{-2k}{1+Ak}\right)^k$. Per il criterio della radice, ponendosi $a_n = \left(\frac{-2n}{1+An}\right)^n$,
$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1+An} = \frac{2}{A}$. Dunque se $A > 2$, la serie converge assolutamente.
Se $A < 2$, la serie non converge. Se $A = 2$, $\left(\frac{-2k}{1+2k}\right)^k = 1/\left(\frac{1+2k}{-2k}\right)^k = (-1)^k \cdot 1/\left(1+\frac{1}{2k}\right)^k$
e $\left(1+\frac{1}{2k}\right)^k \to \sqrt{e}$. In particolare, $a_n \not\to 0$, e dunque la serie non converge.

Serie a termini di segno alterno

Siano $0 \leq a_k$ e consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Esempio $\sum (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Teo (criterio di Leibniz)

Siano $0 \leq a_k$, e supponiamo che (i) $a_k \to 0$ per $k \to \infty$. (ii) $a_k \geq a_{k+1}$ per $k \in \mathbb{N}$. (decrescente). Allora $\sum (-1)^k a_k$ converge.

dim). Poniamo $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = S_n$. Si osserva:

(1) La sotto successione $\{S_{2n}\}$ è decrescente.

Infatti, $S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - a_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2})$,
e siccome $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, segue che $S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$.

(2) $\{S_{2n+1}\}$ è crescente.

Infatti, $S_{2(n+1)+1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k + a_{2n+2} - a_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3}$
e siccome $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, segue che $S_{2(n+1)+1} \geq S_{2n+1}$.

(3) Vale $S_{2n} \geq S_{2n+1}$. Infatti, $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ e $a_{2n+1} \geq 0$.

(4) $\{S_{2n}\}$ è limitata inferiormente (da S_1) Infatti, $S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_{2n-1} \geq \cdots \geq S_1$.
$\{S_{2n+1}\}$ è limitata superiormente (da S_2) Infatti, $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \cdots \leq S_2$.

Siano $S_{2n} \to S''$, $S_{2n+1} \to S'$.

(5) $S' = S''$. Infatti, $S' - S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$
per l'ipotesi.

Dunque tutta la successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ converge a $S' = S''$.

Esempi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge per il criterio di Leibniz.

Infatti, basta verificare che (i) $\frac{1}{k} \to 0$ per $k \to \infty$ (ii) $\frac{1}{k}$ è decrescente.

Si nota che, anche se $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

La convergenza di $\sum a_k$ non implica la convergenza assoluta (di $\sum |a_k|$).

La condizione (ii) può essere verificata solo definitivamente.

(ii) può essere verificata usando derivata.

$\sum (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$. Si pone $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$. $f'(x) = \frac{-4(x^2+1) - 2x(x-4)}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) < 0$ per grande. Si conclude che $\frac{k-4}{k^2+1}$ è decrescente. è chiaro che $\frac{k-4}{k^2+1} \to 0$

Dunque $\sum (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}$ converge per il criterio di Leibniz.

AM2 Lezione 5 Serie di potenze 2025.09.30.

Consideriamo serie della seguente forma, detta serie di potenze.
Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ una successione. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$
per vari $x \in \mathbb{R}$.

Esempi · $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$ $x_0 = 3$, $a_k = \frac{1}{k+1}$.
· $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$

Il primo esempio converge se $|x-3|<1$, per il confronto con la serie geometrica, $\frac{(x-3)^k}{k+1} < (x-3)^k$, ma se $|x-3|>1$, la serie non converge perché $\left|\frac{(x-3)^k}{k+1}\right| \to \infty$.

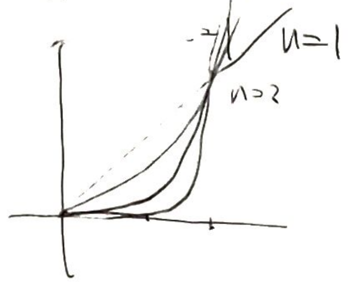
Il secondo esempio converge per tutti $x \in \mathbb{R}$, per il criterio del rapporto.

Teo una serie di potenze (i) o converge per tutti $x \in \mathbb{R}$ (ii) o esiste $r \in [0,\infty)$ t.c. la serie converge assolutamente se $|x-x_0| < r$ e non converge se $|x-x_0| > r$.
dim). Supponiamo che la serie converge per alcuni x e non per altri.
Sostituendo $x-x_0$ con x, basta considerare la serie $\sum a_k x^k$.
Supponiamo che la serie converga per un $x_1 \in \mathbb{R}$.
Allora la serie converge anche per x t.c. $|x|<|x_1|$. Infatti, siccome la serie converge per x_1, $a_k(x_1)^k \to 0$. In particolare, $\{|a_k x_1^k|\}$ è limitata, da $C>0$.
Ora sia $|x|<|x_1|$. Applichiamo il criterio della radice a $\sum a_k x_1^k$.
Abbiamo $\lim_{k\to\infty} (a_k x^k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (a_k x_1^k)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{|x|}{|x_1|} = \frac{|x|}{|x_1|} < 1$. Dunque $\sum a_k x^k$ converge.
D'altraparte, sia $x_2 \in \mathbb{R}$ per cui la serie non converge. Se $|x|>|x_2|$, la serie $\sum a_k x^k$ non converge, infatti, se $\sum a_k x^k$ dovesse convergere, per l'argomento precedente, dovrebbe convergere pure $\sum a_k x_2^k$, contraddizione.
Sia $r = \sup\{s \in \mathbb{R} : \text{per tutti } x \in \mathbb{R}, |x|<s, \sum a_k x^k \text{ converge}\}$.
L'insieme non è vuoto (c'è 0) è limitato superiormente (da $|x_2|$).
Ripetendo gli argomenti analoghi, si dimostra che la serie converge assolutamente se $|x|<r$ e non converge se $|x|>r$. (si prende $|x|<|x_1|<s$).
r è detto il raggio di convergenza.
Esempio $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k+1}$. Il raggio r di convergenza è 1.

Si nota che, quando una serie di potenze converge, si può definire una funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. Che proprietà ha f?

Successioni e serie di funzioni (Epsilon 2, sezioni 8.3 in poi).

Si considera, per $n \in \mathbb{N}$, una successione $\{x^n\}$ su $[0,\infty)$.
Ossia, per ogni $x \in [0,\infty)$, si considera la successione numerica $\{x^n\}$.
Se $x \in [0,1)$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Se $x=1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Se $x>1$, $x^n \to \infty$.



Come in questo esempio, quando c'è una successione di funzioni, su alcuni punti può convergere, su altri può non convergere.
Anche sull'insieme $[0,1]$ della convergenza, il limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è discontinua.

Quando il limite è "buona"?

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni su X e f una funzione su X, $E \subset X$.

Def Si dice che $\{f_n\}$ converge puntualmente in E a f se per ogni $x \in E$ $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Ossia, per ogni x, $\varepsilon > 0$, esiste $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per tutti $n \ge N_{x,\varepsilon}$.

Def Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente in E a f se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. per tutti $x \in E$ e $n \ge N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Esempi
- Sia $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f(x) = 0$.
In fatti, siccome $|\sin x| \le 1$, $|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} |\sin x| \le \frac{1}{n} \to 0$.
- Sia $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.
$\{f_n\}$ converge puntualmente a f, ma non uniformemente.
Infatti, siano $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Per $x = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $f_n(x) - f(x) = 1 - \varepsilon > \varepsilon$ se $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

AM1 Lezione 6 Convergenza uniforme 2025.10.02

Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni. $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

<u>Teo</u> Supponiamo che $\{f_n\}$ sono continue su X e converge a f uniformemente. Allora f è continua su X.

dim) Siano $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Siccome $\{f_n\}$ converge a f uniformemente, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. per tutti $x \in X$, $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Siccome f_{N+1} è continua, esiste $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale $|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ora, con lo stesso δ, se $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, vale

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0) + f_{N+1}(x_0) - f(x_0)|$$
$$\le |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

<u>(Non)esempio</u> • $\{x^n\}$. $X = [0,1]$ converge a $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ puntualmente ma non uniformemente. Infatti, anche se $f_n(x) = x^n$ sono continue, il limite $f(x)$ non è continua.

• $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Per ogni $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = [-nxe^{-nx}]_0^1 - \int_0^1 (-ne^{-nx})\,dx = -ne^{-n} + [-e^{-nx}]_0^1 = 1 - (n+1)e^{-n}$

$\to 1$ per $n \to \infty$. D'altra parte, $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

<u>Teo</u> Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\{f_n\}$ converga a f uniformemente. Allora $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

dim) Sia $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme, esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c., per tutti $x \in [a,b]$ e $n > N$, vale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora, con lo stesso N, per $n > N$,

$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx$
$= \varepsilon$. Questo dimostra che $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Serie di funzioni</u>

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni. Come serie numeriche, si può considerare la successione $\{\sum_{k=1}^n f_k\}$ delle funzioni, che si chiama serie (di funzioni).

Si definisce convergenza puntuale/uniforme per la serie come la convergenza di $\{\sum_{k=0}^n f_k\}$.

<u>Teo</u> Siano $\{f_n\}$ funzioni continue su X. Supponiamo che $\{\sum f_k\}$ converga uniformemente. Allora $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ è continua su X e $\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty f_k(x)\,dx$.

Esercizi Studiare la convergenza

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \log k}$ (confronto con l'integrale)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (rapporto)

Studiare la convergenza semplice/assoluta

- $\sum (-1)^k \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$

Dire per quali valori di x la serie converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^x + 1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2+3k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k$$

AM2 Lezione 7 Serie di Taylor. 2025. 10. 06

Per una successione $\{a_k\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie di potenze è $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.
Abbiamo definito il raggio r. In realtà, vale

<u>Teo</u> $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (se il limite esiste).

dim) Per il criterio del rapporto, applicato a $\sum a_k(x-x_0)^k$, ossia si calcola $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||x-x_0|^{k+1}}{|a_k||x-x_0|^k} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Se il limite <1, ossia se $|x-x_0| < \lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, la serie converge e se $|x-x_0| > \lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, la serie diverge. Per definizione, si ha $r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

<u>Teo</u> Per $\sum a_k(x-x_0)^k$ con il raggio di convergenza r, $0<\rho<r$, la serie converge uniformemente in $[x_0-\rho, x_0+\rho]$, e assolutamente.

dim) Sia $x \in [x_0-\rho, x_0+\rho]$, allora $|x-x_0| \le \rho$ e sappiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k$ converge.
Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste N t.c. per $n > N$ vale $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\rho^k - \sum_{k=0}^{n}|a_k|\rho^k = \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\rho^k < \varepsilon$. Allora per tutti $x \in [x_0-\rho, x_0+\rho]$, si ha
$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(x-x_0)^k| - \sum_{k=0}^{n}|a_k(x-x_0)^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k||x-x_0|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\rho^k < \varepsilon$.
Ossia, $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ converge uniformemente e assolutamente.

Per il teorema di venerdì scorso, possiamo integrare serie termini per termini.
Poniamo $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

<u>Teo</u> Se $|x-x_0| < r$, allora $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$.

dim) La serie converge uniformemente $[x_0 - |x-x_0|, x_0 + |x-x_0|]$. Consideriamo il caso $x - x_0 \ge 0$, allora è $[2x_0 - x, x] \supset [x_0, x]$. Dunque
$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\left[(t-x_0)^{k+1}\right]_{x_0}^{x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$!

Notiamo che, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$ ha lo stesso raggio di convergenza.
$\lim_{k\to\infty}\frac{|(k-1)a_{k-1}|}{|k a_k|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$..

Poniamo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$. $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)a_{k+1}}{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^{k+1}$
$= \sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k - a_0$.
Questo dimostra che, se $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k - a_0 = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, allora
$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k = f(x)$.
Ossia, la serie di potenze si può differenziare termine per termine.

Sia f una funzione definita in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, e differenziabile infinite volte.
Allora possiamo considerare la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

<u>Teo</u> Supponiamo che esista $A>0$ t.c. $|f^{(k)}(x)| < A^k$ per $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$.
Allora si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

dim). Per la formula di Taylor con il resto di Lagrange (Epsilon 1, par 6.19).
esiste c tra x_0, x t.c. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
Per l'ipotesi, $\left|f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{(A|x|)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ per $n \to \infty$, ossia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

<u>Esempi</u> $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x$. $\left|f^{(n)}(x)\right| < e^\rho \leq \underbrace{(e^\rho)^k}_{\forall k}$. $x_0 = 0$.
Dunque $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \qquad (|x|<1).$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

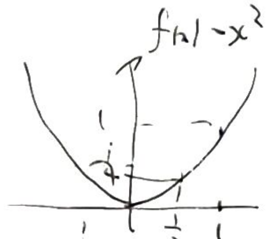
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

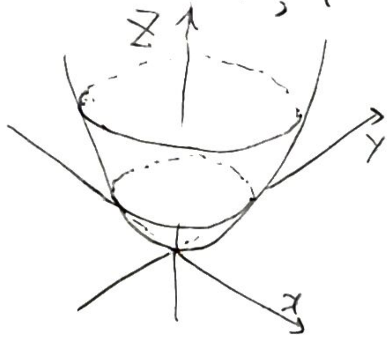
AM2 Lezione 8 Funzioni di più variabili 2025.10.07

Funzioni di più variabili (Capitolo 1 di Epsilon 2)

In AM1, si è studiata la teoria di funzioni di una variabile $f(x)$.
In AM2, si considerano funzioni di più variabili.
$f(x, y)$ (quando ci sono 2 variabili) $f(x, y, z)$ (3 variabili). $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (n variabili).
(x, y) si può considerare come un punto in $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$.
Dunque $f(x, y)$ è una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.
(Più avanti studiamo funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$).



Ricordiamoci che il grafico di una funzione di una variabile $f(x)$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.
Per una funzione di due variabili, bisogna considerare l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$.
Per esempio, il grafico di $z = x^2 + y^2$ è un paraboloide.



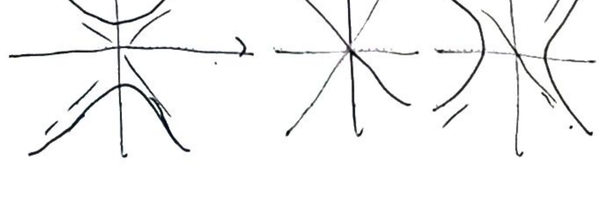
In generale, non è possibile disegnare il grafico di una funzione di più variabili sul piano.
Ciò nonostante possiamo fare il calcolo (derivate, integrale) e studiare le proprietà, generalizzando le idee di AM1.

Gli insiemi di livelli

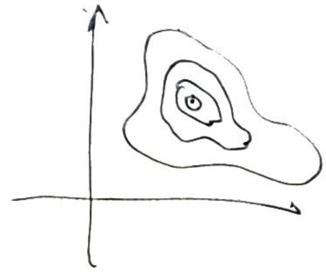
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f una funzione definita in Ω (Ω è detto il dominio). $f: \Omega \to \mathbb{R}$.
Sia $c \in \mathbb{R}$. L'insieme $\{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ è detto l'insieme di livello c di f.

Esempi
- $f(x, y) = x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sia $c \in \mathbb{R}$.
  se $c > 0$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$ è un cerchio.
  $c = 0$ $\{x^2 + y^2 = 0\}$ è $\{(0, 0)\}$.
  $c < 0$, $\{x^2 + y^2 = c\}$ è vuoto.

- $f(x, y) = x^2 - y^2$. Sia $c \in \mathbb{R}$.
  Se $c > 0$ $\{(x, y) : x^2 - y^2 = c\}$ è due iperbole
  $c = 0$ $\{x^2 - y^2 = 0\}$ è due rette
  $c < 0$ $\{x^2 - y^2 = c\}$ è due iperbole



Se $f(x,y)$ rappresenta la pressione atmosferica, gli insiemi di livello sono noti come isobare. Se $f(x,y)$ rappresenta l'altezza dal mare, si chiamano isoipse.

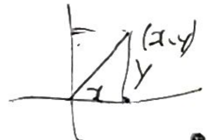


$\mathbb{R}^n$ e la sua topologia

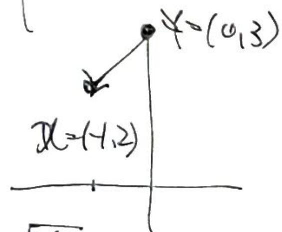
Si scrive $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, ecc.
$\mathbb{R}^n$ si può considerare come uno spazio vettoriale.
Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, si definiscono $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$, $a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$.
Si può prendere la base canonica. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-esimo}}{1}, 0, 0, \dots, 0)$.
Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$.

Siano $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}$. Il loro prodotto scalare è
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n = \sum_{j=1}^n v_jw_j$. $(= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle)$.
Gode delle seguente proprietà • $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$, • $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_2$,
• $(a\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ • $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$. $= 0$ se è solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Si dice la norma/lunghezza di $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ il numero $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \left(\sum_{j=1}^n v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Se $n = 2$, $\mathbf{v} = (x, y)$. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ è infatti la lunghezza del vettore $\mathbf{v}$.



Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La distanza di due punti è definita da $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Si nota che $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è il vettore che va da $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$.



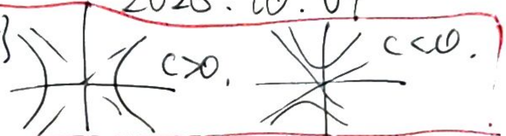
Esempi. In $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (-1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, 3)$. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$.
In $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{y} = (0, 3, -1)$. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2-3)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{6}$.

Lemma (Cauchy-Schwarz). Per $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, vale $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.
dim) Sia $t \in \mathbb{R}$. Vale $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+t\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+t\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + t\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{x} + t^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$
$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$. Come la funzione di t, si ha $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$.

Lemma (disuguaglianza triangolare) $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
dim). $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$.
Per questo $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ si può usare come la distanza in $\mathbb{R}^n$.

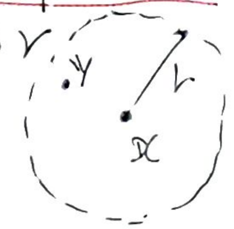
AM2 Lezione 9 Topologia in $\mathbb{R}^n$ 2025.10.09

$\{(x,y) : x^2 - y^2 = c\}$



Insiemi aperti e chiusi

Siano $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si dice l'intorno sferico di x di raggio r, l'insieme $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$.



Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$. x è detto un punto interno di Ω se esiste $r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset \Omega$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice insieme aperto se tutti $x \in \Omega$ sono punti interni.

Esempi/lemma Siano $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Allora $B_r(a)$ è aperto.

dim). Sia $x \in B_r(a)$. Per definizione, $\|x - a\| < r$.

Prendiamo $0 < r_1 < r - \|x - a\|$. Allora $B_{r_1}(x) < B_r(a)$.

Infatti, per ogni $y \in B_{r_1}(x)$, vale che $\|y - x\| < r_1$. Allora segue che $\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r_1 + \|x - a\| < r$. Dunque $y \in B_r(a)$.

Questo dimostra che ogni $y \in B_r(a)$ è interno.

Def Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Ossia, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Sia $a \in \mathbb{R}^n$.

Si dice che $\{x^{(k)}\}$ converge a a se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k > K$ $\|x^{(k)} - a\| < \varepsilon$. Si scrive $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = a$, oppure $x^{(k)} \to a$ per $k \to \infty$.

Equivalentemente, $\{x^{(k)}\}$ converge a a se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, $x^{(k)} \in B_\varepsilon(a)$ definitivamente.

Ricordiamo che $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. $\|x^{(k)}\|^2 \to 0$ (per $k \to \infty$) se e solo se per tutti $j = 1, \ldots, n$, vale che $x_j^{(k)} \to 0$ (per $k \to \infty$). (Infatti, $x_j^{(k)2} \leq \|x^{(k)}\|^2$. viceversa, il limite della somma è la somma del limite).

In particolare, $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a $a \in \mathbb{R}^n$ se e solo se per tutti $j = 1, \ldots, n$ $x_j^{(k)}$ converge a a_j per $k \to \infty$.

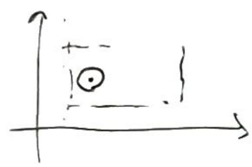
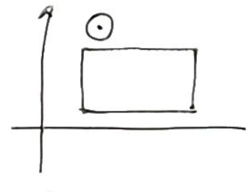
Def Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω è detto chiuso se, per tutte le successioni $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ convergente a $a \in \mathbb{R}^n$, vale che $a \in \Omega$.

Teo Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω è aperto se e solo se $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è chiuso.

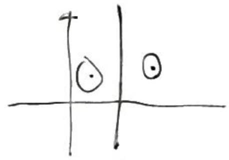
dim) Supponiamo che Ω è dimostriamo che Ω^c è chiuso per assurdo.

Dunque supponiamo che esista $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$, $x^{(k)} \to a \notin \Omega^c$, ossia $a \in \Omega$.
Siccome Ω è aperto, esiste $r > 0$ t.c. $B_r(a) \subset \Omega$. Esiste $K \in \mathbb{N}$ t.c. per $k > K$ vale $\|x^{(k)} - a\| < r$. Significa che $x^{(k)} \in B_r(a) \subset \Omega$, contraddizione.
D'altra parte, supponiamo che Ω^c sia chiuso e dimostriamo che Ω è aperto, per assurdo.
Dunque supponiamo che, esiste $a \in \Omega$ t.c. per tutti $r > 0$ non vale che $B_r(a) \subset \Omega$, ossia $B_r(a) \setminus \Omega$ non è vuoto. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si può prendere un punto $x^{(k)} \in B_{\frac{1}{k}}(a) \setminus \Omega \subset \Omega^c$. Siccome $\|x^{(k)} - a\| < \frac{1}{k}$, si ha che $x^{(k)} \to a$, $k \to \infty$
D'altra parte, siccome $\{x^{(k)}\} \subset \Omega^c$, segue che $a \in \Omega^c$ per l'ipotesi. Contraddizione.

Esempi In $\mathbb{R}^2$, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1 \text{ e } a_2 < x_2 < b_2\}$ è aperto.
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \le x_1 \le b_1 \text{ e } a_2 \le x_2 \le b_2\}$ è chiuso
$(a_1, b_1) \times [a_2, b_2]$ non è né aperto né chiuso

In $\mathbb{R}^2$, $\{(x_1, x_2) : x_1 = a\}$ è chiuso



Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n$ si dice un punto di accumulazione se esiste $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ t.c. $x^{(k)} \to x$ (per $k \to \infty$). Non necessariamente $x \in \Omega$.. $(0,0)$ per $(0,1) \times (0,1)$.

Limiti di funzioni e continuità

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 un punto di accumulazione di Ω. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Def Si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite di f per x che tende a x_0 se per ogni successione $\{x^{(k)}\} \subset \Omega$ t.c. $x^{(k)} \neq x_0$, $x^{(k)} \to x_0$, vale che $f(x^{(k)}) \to \ell$ per $k \to \infty$.
(si considerano anche i casi in cui $\ell = \pm\infty$ con una definizione analoga).
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Esempi $f(x, y) = x^2 y$. $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Si ha $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 y = 0$. Infatti, sia $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\}$ t.c. $(x^{(k)}, y^{(k)}) \to (0,0)$.
Allora $x^{(k)} \to 0$, $y^{(k)} \to 0$ Dunque $(x^{(k)})^2 y^{(k)} \to 0$.
- $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Non ha il limite per $x \to (0,0)$.
Infatti, $(\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$ e $f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \to 0$, mentre $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$,
$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

Def $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice continua in $x_0 \in \Omega$ se, o x_0 non è un punto di accumulazione, o $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

AM2 Lezione 10 2025.10.13

Ricordiamo, per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, un punto di accumulazione di Ω (esiste $\{x^{(k)}\}$ in Ω, $x^{(k)} \to x_0$, $k \to \infty$

Siano $\ell \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa che, per tutte $\{x^{(k)}\}$ in Ω, $x^{(k)} \to x$, vale che $\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = \ell$.

Molte proprietà del limite seguono da quelle di successioni.

Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$. Allora

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{k \to \infty} (f(x^{(k)}) + g(x^{(k)})) = \ell + m = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \to x} f(x))(\lim_{x \to x_0} g(x))$.
- Se $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\lim_{x \to x_0} f(x)) / (\lim_{x \to x_0} g(x))$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$. Se x_0 non è un punto di accumulazione, si dice un punto isolato. Allora esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$.

Ricordiamo che $f : \Omega \to \mathbb{R}$, f si dice continua in x_0 se, o x_0 è isolato o $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teo f è continua in x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per tutti $x \in B_\delta(x_0)$, vale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

dim). Sia f continua in x_0. Ci sono due casi: se x_0 è isolato, allora sia $\delta > 0$ come sopra. Per $\varepsilon > 0$, usiamo quel δ, allora $x \in B_\delta(x_0)$ significa $x = x_0$, dunque $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Sia x_0 un punto di accumulazione.

Per assurdo, supponiamo che, esiste $\varepsilon > 0$ t.c. per tutti $\delta > 0$ esiste $x_\delta \in B_\delta(x_0)$ t.c. $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Allora per $k \in \mathbb{N}$ prendiamo un tale $x_{\frac{1}{k}} \in B_{\frac{1}{k}}(x_0)$, $x_{\frac{1}{k}} \neq x_0$. $x_{\frac{1}{k}} \to x$ (per $k \to \infty$) però $|f(x_{\frac{1}{k}}) - f(x)| \geq 0$, contraddice l'ipotesi.

Viceversa. Sia $\{x^{(k)}\}$ in Ω, $x^{(k)} \neq x_0$, $x^{(k)} \to x_0$. (Per $\delta > 0$) esiste $K \in \mathbb{N}$ s.t. per tutti $k > K$ vale che $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$. Per l'ipotesi, per $k > K$, $|f(x^{(k)}) - f(x)| < \delta$. Siccome $\{x^{(k)}\}$ è arbitraria, questo dimostra la continuità di f in x_0.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Scriviamo $\mathrm{im}\, f = f(\Omega) := \{f(x) : x \in \Omega\} = \{z \in \mathbb{R} : \text{esiste } x \in \Omega \text{ t.c. } z = f(x)\}$.

Se abbiamo $D \subset \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$.

Allora possiamo definire la funzione composta $g \circ f(x) := g(f(x))$, definita su Ω.

Teo. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$, $x_0 \in \Omega$. Supponiamo che f sia continua in x_0 e g sia continua in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è continua in x_0.

dim). Sia $\varepsilon > 0$. Per continuità di g in $f(x_0)$, esiste $\delta' > 0$ t.c. per tutti $z \in D$ $|z - f(x_0)|$, vale che $|g(z) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. Per continuità di f in x_0 (rispetto a $\delta' > 0$), esiste $\delta > 0$ t.c. per $x \in \Omega$, $|x - x_0| < \delta$, vale che $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$.
Ponendo $z = f(x)$, concludiamo che, per tale x, vale $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Def. Si dice che $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è continua (in Ω) quando f è continua in tutti $x_0 \in \Omega$.

Cor. Siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $f(\Omega) \subset D$, f, g continue. Allora $g \circ f$ è continua.

Esercizi Studiare il dominio naturale e il limite.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$. (definito per $x+y \neq 0$)
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$ ($x+y \neq 0$)
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2+|y|}$

- L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 3\}$ è aperto / chiuso / nessuno.
- Il dominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{y-1}$ è aperto / chiuso / nessuno.

AM 2. Lezione 11 Compattezza, curve 2025. 10. 14

<u>Def</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto (sequenzialmente) se ogni successione $\{x^{(k)}\}$ in K ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento in K.
$K \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $r>0$ t.c. $K \subset B_r(0)$, $0=(0,\dots,0)$.

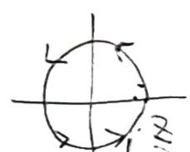
<u>Non esempio</u> $B_r(a)$ non è compatto. Infatti, si può prendere $a+(r-\frac{1}{k}, 0, \dots, 0) = x^{(k)}$
$\{(x,y): x>0\}$ non è limitato.

<u>Teo</u> (Bolzano-Weierstrass) $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è limitato e chiuso.
dim). Se K non è limitato, si può prendere $\{x^{(k)}\}$ in K, $\|x^{(k)}\| \to \infty$ dunque K non è compatto.
Se K non è chiuso, allora esiste $\{x^{(k)}\}$ in K, convergente ma $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \notin K$. K non è compatto.
Viceversa, sia K chiuso e limitato. Sia $\{x^{(k)}\}$ una successione in K.
Ossia $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ per $k \in \mathbb{N}$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass,
$\{x_1^{(k)}\}$, una successione limitata, ha una sottosuccessione $\{x_1^{(k_{j_1})}\}_{j_1\in\mathbb{N}}$, convergente.
$\{x_2^{(k_{j_1})}\}$ - - - - $\{x_2^{(k_{j_1, j_2})}\}_{j_2\in\mathbb{N}}$ convergente.
Si ripete il processo per n-componenti, e si ottiene una sottosuccessione $\{x^{(k_\ell)}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, di cui tutti componenti sono convergenti, dunque convergente, ad $x \in \mathbb{R}^n$!
Siccome K è chiuso, $x \in K$. così K è compatto.

$\boxed{\text{Weierstrass}}$

<u>Curve in $\mathbb{R}^n$</u>

Finora abbiamo considerato funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Si possono considerare funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo $I=(a,b)$, $[a,b]$ o simile.
Una funzione $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ si può scrivere come $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.
γ si dice continua se tutti $\gamma_j(t)$ sono continui, $j=1,\dots,n$.
Una funzione continua γ si dice una curva.



<u>Esempi</u> In $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ è una curva.
In $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ è una curva.

Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice connesso (per cammini) se ogni coppia x, y ammette una curva $\gamma: [a,b] \to \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Def Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \Omega$ si dice punto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ globale (assoluto) se per tutti $x \in \Omega$, vale che $\begin{cases} f(x) \le f(x_0) \\ \ge \end{cases}$.
$f(x_0)$ (il valore) si dice il $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ globale (assoluto) di f.

Teo (Weierstrass) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f: K \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette un massimo e un minimo, e $\neq \infty$, $\neq -\infty$.
dim). Dimostriamo il caso di massimo. In $f(K)$, si prende $\{Y_k\}$ t.c. $Y_k \to \sup f(K)$.
Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si prende $x^{(k)} \in K$ t.c. $f(x^{(k)}) = Y_k$.
Per la compattezza, esiste una sottosuccessione $\{x^{(k_j)}\}$ convergente, a $x_0 \in K$.
Per la continuità di f, $\lim_{j\to\infty} f(x^{(k_j)}) = f(x_0) = \lim_k Y_k = \sup f(K)$.
Dunque $f(x_0) = \sup f(K)$. f assume il massimo in x e $f(x) \neq \infty$..

Teo Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ è connesso.
dim) Siano $x, y \in f(\Omega)$. Allora esistono $w, v \in \Omega$ t.c. $f(w) = x$, $f(v) = y$.
Per connessione di Ω, esiste $\gamma(t): [a,b] \to \Omega$, $\gamma(a) = w$, $\gamma(b) = v$. continua.
Allora $f \circ \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, $f\circ\gamma(a) = f(w) = x$, $f \circ \gamma(b) = y$.

Lemma. Siano $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ continua. Allora $f \circ \gamma$ è continua.
dim) Analogo al caso di $g \circ f$. Alternativamente, sia $\{x^{(k)}\}$ in $[a,b]$, $x^{(k)} \to x \in [a,b]$.
Allora $\lim_{k\to\infty} \gamma(x^{(k)}) = \gamma(x) \in \Omega$. e $\lim_{k\to\infty} f(\gamma(x_k)) = f(\gamma(x)) = f\circ\gamma(x)$.

- descrivere la curva $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$ in $\mathbb{R}^2$.

$\gamma(t) = (t^3, t^3, t^3)$ in $\mathbb{R}^3$.

$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ for $t \in [-1,1]$ in $\mathbb{R}^2$.

Calcolare funzioni composte. $f(x,y) = x^2 y$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

$f(x,y,z) = x+y-z$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$.

AM2 Lezione 12 Insiemi connessi, esercizi 2025.10.16

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice connesso se per ogni coppia $x, y \in \Omega$ esiste una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$

Teo (degli zeri). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che esistino $x, y \in \Omega$ t.c. $f(x) > 0$, $f(y) < 0$.
Allora esiste $z \in \Omega$ t.c. $f(z) = 0$.
dim). Prendiamo una curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.
$f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, $f(\gamma(a)) = f(x) > 0$, $f(\gamma(b)) = f(y) < 0$.
Per il teorema degli zeri (valore intermedio), esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f \circ \gamma(c) = 0$.
Sia $z = \gamma(c)$. Allora $f(z) = f(\gamma(c)) = 0$.

Cor. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. continua. Allora $f(\Omega)$ è un intervallo. o un punto.
dim). Sia λ t.c. $\inf f(\Omega) < \lambda < \sup f(\Omega)$. (se $\inf f(\Omega) = \sup f(\Omega)$, f è costante).
Allora esistono $x, y \in \Omega$. t.c. $f(y) < \lambda < f(x)$. Per il teorema precedente applicato a $f - \lambda$, esiste $z \in \Omega$ t.c. $f(z) - \lambda = 0$. ossia $f(z) = \lambda$.
Quindi $f(\Omega) \supset (\inf f(\Omega), \sup f(\Omega))$.

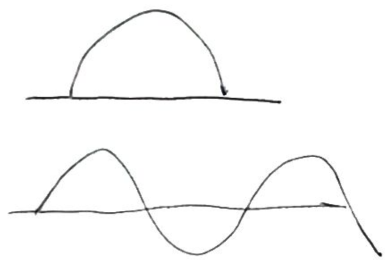
Prop Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. $E \subset \mathbb{R}$. $f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$.
(1) Sia E aperto in $\mathbb{R}$. Allora $f^{-1}(E)$ è aperto.
(2) Sia E chiuso in $\mathbb{R}$. Allora $f^{-1}(E)$ è chiuso.
dim) (1) Sia $x \in f^{-1}(E)$, ossia $f(x) \in E$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c.
$\underbrace{B_\varepsilon(f(x))}_{(f(x)-\varepsilon,\, f(x)+\varepsilon)} \subset E$. Esiste $\delta > 0$ t.c. per $y \in B_\delta(x)$, vale $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset E$.
Allora $y \in f^{-1}(E)$. Ossia $B_\delta(x) \subset f^{-1}(E)$.
(2) E^c è aperto. Si ha $f^{-1}(E^c) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E^c\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}^c$
$= (f^{-1}(E))^c$. Per (1). $f^{-1}(E^c)$ è aperto. Allora $f^{-1}(E) = (f^{-1}(E))^{cc}$
$= (f^{-1}(E^c))^c$ è chiuso.

Esercizi

Dire se i seguenti insiemi sono aperti/chiusi/limitati/connessi

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2>2\}$
- $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+9z^2\le 16\}$.

- Trovare una rappresentazione come una curva



Calcolare la funzione composta

- $f(x,y,z)=x+ye^z$. $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$

  $f\circ\gamma$. $\gamma\circ f$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. $\gamma(t)=(\cos(t^2)\cos t,\ \cos(t^2)\sin t,\ \sin(t^2))$.

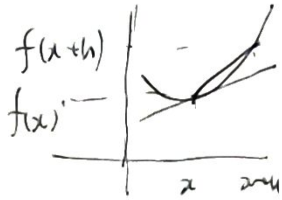
$f\circ\gamma$.

Siano A, B aperti. Dimostrare che $A\cup B$, $A\cap B$ sono aperti.

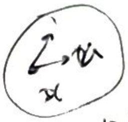
Ci sono A_n aperti, $n\in\mathbb{N}$, t.c. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ non è aperto?

AM2 Lezione 13 Derivate parziali ([Epsilon 2, Sect. 1.6?] 2025. 10. 20)

In AM1, abbiamo definito la derivata di una funzione f come $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
e dà la pendenza del grafico di f al punto $(x, f(x))$.



Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.



Ci sono tante direzioni in $\mathbb{R}^n$, descritta da un vettore $v \in \mathbb{R}^n$.

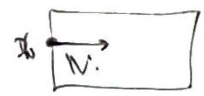
Def (derivata direzionale). Sia $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. Se il limite
$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ esiste, allora si scrive $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = D_v f(x)$, e
si dice la derivata nella direzione v di f in x.

Esempio Siano $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 y$, $x_0 = (-1, 3)$, $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ($\|v\| = 1$).

$$x_0 + tv = \left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}, 3 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right). \quad D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(-1+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2\left(3+\frac{t}{\sqrt{5}}\right) - (-1)^2 3}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(-\frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + o(t)}{t} = -\frac{11}{\sqrt{5}}.$$

Oss Per definire derivate direzionali, x_0 può essere al bordo di Ω se $x_0 + tv \in \Omega, t > 0$.



Come i casi particolari, si considerano $e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-esimo}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$
La derivata nella direzione e_k si dice la derivata parziale rispetto a x_k di f in x.
Si usano i seguenti simboli $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $D_{x_k} f(x)$, $\partial_{x_k} f(x)$, $D_{e_k} f(x)$, $D_k f(x)$,

Sia $n=2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $D_1 f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x)}{t}$ è la derivata della funzione
$e_1 = (1,0)$, $x + te_1 = (x+t, y)$
$x \mapsto f(x,y)$, ossia, la funzione f in cui y è trattato come un costante.
Analogamente, se $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $D_k f(x)$ si può calcolare facendo
la derivata della funzione $x_k \mapsto f(x_1, \dots x_k, \dots x_n)$, considerando altri $x_j, j \neq k$, costanti.

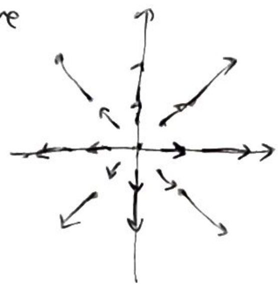
Esempi. $f(x,y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$\partial_x f(x,y) = 2x - 3 + 4y$, $\partial_y f(x,y) = 4x$.

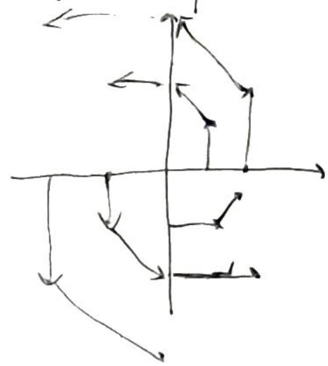
- $f(x,y) = e^{x^2+3y^2} \sin(x-y)$

$$\partial_x f(x,y) = 2x\, e^{x^2+3y^2} \sin(x-y) + e^{x^2+3y^2} \cos(x-y).$$
$$\partial_y f(x,y) = 6y\, e^{x^2+3y^2} \sin(x-y) - e^{x^2+3y^2} \cos(x-y).$$

Finora abbiamo considerato funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ o da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$.
È possibile considerare anche funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$!
Come con curvi, una funzione $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ assegna, per $x = (x_1, \dots, x_m)$, un vettore $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$.
Ogni componente $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ è una funzione da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$.

Quando $m = n$, e si considerano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ si dice un campo vettoriale.
Un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ si può rappresentare con frecce sul piano.





<u>Esempi</u> · $f(x, y) = (x, y)$.

· $f(x, y) = (-y, x)$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Se collezioniamo tutte le derivate parziali, $\nabla f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)) \in \mathbb{R}^n$
si dice gradiente di f in x. È un esempio di un campo vettoriale.

<u>Esempi</u> · $f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$.
$\nabla f(x, y) = (2x - 3 + 4y, 4x)$.
· $g(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
$\nabla g(x, y, z) = (2x, 3y^2, 4z^3)$.

<u>Oss</u> Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. $\alpha \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che f e g abbiano derivate parziali in x. Si ha
- $\nabla(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \nabla f(x)$.
- $\nabla(f + g)(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x)$.
- $\nabla(f \cdot g)(x) = f(x) \nabla g(x) + \nabla f(x) \cdot g(x)$.
- $\nabla(f/g)(x) = \dfrac{g(x) \cdot \nabla f(x) - \nabla g(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$ se $g(x) \neq 0$.

Esempi (gradiente)
$f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$
$f(x, y, z) = y \sin(zy)$.

Nel senso che, $\nabla f(x) + \nabla g(x) = (D_1 f(x) + D_1 g(x), \dots, D_n f(x) + D_n g(x))$,
$f(x) \cdot \nabla g(x) = (f(x) D_1 g(x), \dots, f(x) D_n g(x))$.
In generale, se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ are campi vettoriali, lo è $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)$. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) \cdot \mathbf{g}(x)$.

AM2 Lezione 14 Differenziabilità (testo Sez 1.7) 2025.10.21

Per una funzione f su $\mathbb{R}$, se è derivabile in x_0, allora $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$.
In $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f si dice derivabile in $\mathbf{x}_0$ se ci sono tutte le derivate parziali $D_k f(\mathbf{x}_0)$

In $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, anche se f è derivabile in $\mathbf{x}_0$, non è detto che è continua in $\mathbf{x}_0$.

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Allora $\partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$.

$\partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$.

Ma $(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}) \to 0$ (per $k \to \infty$), $f(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}) = 1 \to 1$. $f(0,0) = 0$.

Def Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. f si dice differenziabile in $\mathbf{x}_0$ se esiste un vettore $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0. \quad \text{Ossia,}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\right) / \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = 0.$$

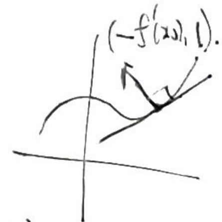
Teo Sia f differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Allora,
(1) f è continua in $\mathbf{x}_0$. (2) f è derivabile in $\mathbf{x}_0$ (3) $\mathbf{m} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

dim). (1). $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = \mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|) \to 0$ per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

(2)(3) Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k$. Allora $D_k f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$

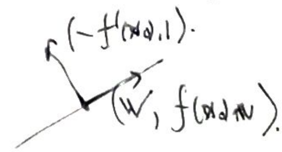
$= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k - \mathbf{x}_0) + o(|t|)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_k + o(|t|)}{t} = m_k$.

Questo dimostra $\mathbf{m} = (D_1 f(\mathbf{x}_0), \dots, D_n f(\mathbf{x}_0)) = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.



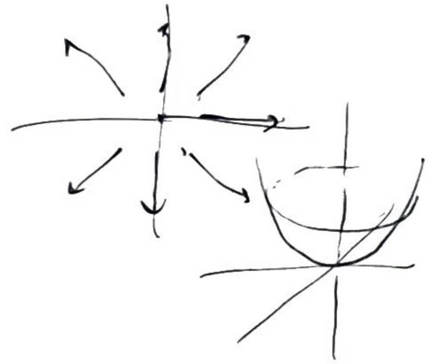
La derivabilità in $\mathbb{R}$ corrisponde alla differenziabilità in $\mathbb{R}^n$.
Per una funzione f su $\mathbb{R}$, $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ rappresenta la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$.
Analogamente, l'(iper)piano in $\mathbb{R}^{n+1}$ determinato da $y = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, $(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si dice il piano tangente al grafico di f in $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}_0))$.

Il vettore $(-f(\mathbf{x}_0), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è normale (ortogonale) al piano tangente di f in $(x_0, f(x_0))$.
Infatti, i vettori nel piano tangente si scrive $(\mathbf{w}, f'(x_0)\cdot\mathbf{w})$. Dunque
$(-f(\mathbf{x}_0), 1)\cdot(\mathbf{w}, f'(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{w}) = 0$. Analogo del caso in $\mathbb{R}$.



Teo Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Allora
$\mathbf{v}_{max} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$ è la direzione di massima crescita, ossia, $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$ è il massimo per $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{max}$

Per $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|=1$, vale che $D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\nabla f(x_0)\cdot tv + o(\|tv\|)}{t}$
$= \nabla f(x_0)\cdot v = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos\alpha$,
dove α è l'angolo tra il vettore $\nabla f(x_0)$ e v. Questo assume il massimo quando $\alpha = 0$, ossia, v e $\nabla f(x_0)$ hanno la stessa direzione.



Esempio. $f(x,y) = x^2+y^2$. $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$.

Prop. (1) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $x_0 \in \Omega$.
Se f, g sono differenziabili in x_0, allora lo sono anche αf, $f+g$ e $f\cdot g$.
(2) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, $g(x_0) \in I$.
Se f è derivabile in $g(x_0)$ e g è differenziabile, allora $f\circ g$ è differenziabile in x_0.

dim (1) Per $f\cdot g$. Ricordiamo $\nabla(f\cdot g)(x_0) = f(x_0)\cdot\nabla g(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot g(x_0)$.
Per ipotesi,
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$
$$g(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$
per $x \to x_0$.
Dunque $f(x)\cdot g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) + \left(f(x_0)\nabla g(x_0) + \nabla f(x_0)\, g(x_0)\right)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$.
(2) Per ipotesi
$$f(t) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot(t-g(x_0)) + o(t-g(x_0)) \quad \text{per } t \to g(x_0).$$
$$g(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \quad \text{per } x \to x_0.$$
Mettendo $t = g(x)$,
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0)) + o(g(x)-g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot(\nabla g(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)) + o(\nabla g(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\nabla g(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \quad \text{per } x \to x_0. \end{aligned}$$
(simile a Teorema 6.22, Epsilon 1, considerando $g(x) \neq g(x_0)$ per $x \neq x_0$).
Questo dimostra che $f\circ g$ è differenziabile in x_0 e $\nabla(f\circ g) = f'(g(x_0))\nabla g(x_0)$.

Esempi $f(x,y) = e^{x^2 y} = \exp(x^2 y) = \exp(g(x,y))$, $g(x,y) = x^2 y$
$\nabla f(x,y) = (2xy\, e^{x^2 y}, x^2 e^{x^2 y}) = e^{x^2 y}(2xy, x^2) = e^{x^2 y}\cdot \nabla g(x,y)$.
$\nabla g(x,y) = (2xy, x^2)$
$f(x,y) = \cos(x^y)$ $(x>0)$.

AM2 Lezione 15 Differenziabilità 2025.10.23

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto, $x_0 \in \Omega$. (oppure Ω generale ma x_0 è interno).
f si dice differenziabili in x_0 se $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ per $x \to x_0$

Teo Se f è derivabile in $B_r(x_0)$ per qualche $r > 0$ e se $D_1 f, \dots D_n f$ sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.

dim) Per semplicità, lo dimostriamo per $n=2$, e mettiamo $x_0 = (x_0, y_0)$, $f(x,y)$
Applichiamo il teorema del valore medio alle funzioni (di una variabile)
$x \mapsto f(x, y_0)$ e $y \mapsto f(x,y)$, esistono ξ tra x e x_0, η tra y e y_0 t.c.

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (f(x,y) - f(x,y_0)) + (f(x,y_0) - f(x_0,y_0))$$
$$= D_y f(x,\eta)(y - y_0) + D_x f(\xi, y_0)(x - x_0).$$

Quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $\xi \to x_0$, $\eta \to y_0$. Per la continuità di $D_y f$, $D_x f$,

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot((x,y) - (x_0,y_0))| \,/\, \|(x,y) - (x_0,y_0)\|^2$$
$$= |f(x,y) - f(x_0,y_0) - (D_x f(x_0,y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0,y_0)(y - y_0))| \,/\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$
$$= |(D_x f(\xi, y_0) - D_x f(x_0,y_0))(x - x_0) + (D_y f(x,\eta) - D_y f(x_0,y_0))(y - y_0)| \,/\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$
$$\le |D_x f(\xi,y_0) - D_x f(x_0,y_0)| + |D_y f(x,\eta) - D_y f(x_0,y_0)| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Regola di catena

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \Omega$. differenziabile in x_0
$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ $g(x_0) \in I$ $g(x_0)$

Si pone
$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{se } y \ne g(x_0). \\ f'(g(x_0)) & \text{se } y = g(x_0). \end{cases}$$
h è continua, in $y = g(x_0)$.

$$f(y) - f(g(x_0)) = (y - g(x_0))\, h(y) \qquad \text{per tutti } y \in I.$$

$$\frac{|f(g(x)) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0))\nabla g(x_0)\cdot(x - x_0)|}{\|x - x_0\|}$$
$$= \frac{|h(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) - f'(g(x_0))\nabla g(x_0)\cdot(x - x_0)|}{\|x - x_0\|}$$
$$= \frac{|h(g(x_0))((\nabla g(x_0)\cdot(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) - f'(g(x_0))\nabla g(x_0)\cdot(x - x_0)|}{\|x - x_0\|}$$
$$= \frac{|(h(g(x_0)) - f'(g(x_0)))\cdot \nabla g(x_0)\cdot(x - x_0) + h(g(x_0))\, o(\|x - x_0\|)|}{\|x - x_0\|} \to 0 \text{ per } x \to x_0.$$

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, differenziabile in $\gamma(t_0)$
$\gamma: I \to \Omega$ t_0 ($\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono differenziabili).

Teo $f \circ \gamma$ è derivabile (differenziabile) in t_0, e $D(f\circ\gamma)(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$,
$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0))$.

dim)
$$\frac{|f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)(t-t_0)|}{t-t_0}$$
$$= \frac{|(\nabla f(\gamma(t_0))\cdot(\gamma(t)-\gamma(t_0)) + o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|) - (\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)(t-t_0))|}{t-t_0}$$
$$= \frac{|\nabla f(\gamma(t_0))\cdot(\gamma'(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)(t-t_0)|}{t-t_0}$$

$\to 0$ per $t \to t_0$.

simile all'argomento precedente.

Esercizi Calculate $D(f(\gamma(t)))$

- $f(x,y) = x^2+y^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$
- $f(x,y) = e^{xy}\cdot\cos(xy^2)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

- calculate the derivative

- $f(x) = x^{(x^x)}$ $x>0$.

- $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

AM2 Lecture 16 Punti critici (Epsilon 2, sez 1.9) 2025.10.27

Per una funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}$, possiamo trovare i punti di massimo/minimo locali.
Prima si cercano punti critici, i punti dove $f'(x_0)=0$, e si studia $f''(x_0) \gtrless 0$.

<u>Def</u> Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ un punto interno.
x_0 si dice un punto critico di f se f è derivabile e $\nabla f(x_0) = 0$.
Ossia, $D_1 f(x_0)=0$, $D_2 f(x_0)=0$, $\cdots$, $D_n f(x_0)=0$.

<u>Esempio</u> • $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^3 y + x^2 - xy - 1$.
$\nabla f(x,y) = (3x^2 y + 2x - y,\ x^3 - x)$. In un punto critico (x_0, y_0), vale
$\nabla f(x_0,y_0) = (3x_0^2 y_0 + 2x_0 - y_0,\ x_0^3 - x_0) = (0,0)$.
Ossia, dobbiamo cercare coppie (x_0,y_0) t.c. $3x_0^2 y_0 + 2x_0 - y_0 = 0$, $x_0^3 - x_0 = 0$.
Dalla seconda, $x_0(x_0^2-1) = x_0(x_0-1)(x_0+1) = 0$, dunque $x_0 = -1$, o 0 o 1.
Corrispondentemente, dalla prima,
$x_0 = -1 \Rightarrow 3(-1)^2 y_0 + 2(-1) - y_0 = 2y_0 - 2 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$. $(x_0,y_0) = (-1,1)$.
$x_0 = 0 \Rightarrow 0 + 0 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$. $(x_0,y_0) = (0,0)$
$x_0 = 1 \Rightarrow 3\cdot 1^2 \cdot y_0 + 2\cdot 1 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$. $(x_0,y_0) = (1,-1)$.
Dunque f ammette tre punti critici.

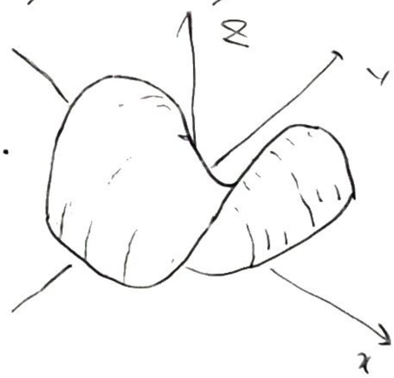
• $\Omega = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = 3x^2 - 5xy + xyz^2$.
$\nabla f(x,y,z) = (6x - 5y + yz^2,\ -5x + xz^2,\ 2xyz)$. In un punto critico (x_0,y_0,z_0),
① $6x_0 - 5y_0 + y_0 z_0^2 = 0$ ② $-5x_0 + x_0 z_0^2 = 0$ ③ $x_0 y_0 z_0 = 0$. Da ③, $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$. o $z_0 = 0$
$x_0 = 0 \Rightarrow$ ① $y_0(z_0^2 - 5) = 0$. $\Rightarrow$ o $y_0 = 0$ ② è già soddisfatto. $(0,0,z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
o $z_0 = \pm\sqrt{5}$. ② è già soddisfatto $(0, y_0, \pm\sqrt{5})$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
$y_0 = 0 \Rightarrow$ ① $x_0 = 0 \Rightarrow$ ② z_0 è arbitrario. $(0,0,z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
$z_0 = 0 \Rightarrow$ ② $x_0 = 0 \Rightarrow$ ① $-5y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$. $(0,0,0)$.
I punti critici sono $(0,0,z_0)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $(0, y_0, \pm\sqrt{5})$ $y_0 \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u>. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f:\Omega \to \mathbb{R}$. $x_0 \in \Omega$. Si dice che x_0 è un punto di $\begin{cases}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{cases}$ locale o relativo se esiste $r > 0$ t.c. per tutti $x \in \Omega \cap B_r(x_0)$, vale $f(x_0) \begin{cases}\geq \\ \leq\end{cases} f(x)$.
Se x_0 è un punto di $\begin{cases}\text{minimo}\\ \text{massimo}\end{cases}$ locale/globale, x_0 si dice un punto estremo locale/globale.
Se x_0 è un punto di $\begin{cases}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{cases}$ globale, allora è un punto di $\begin{cases}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{cases}$ locale,
ma non viceversa.

Teo (di Fermat) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ interno, f derivabile in x_0.
Se x_0 è un punto di estremo locale, allora $\nabla f(x_0) = 0$.
dim) Sia x_0 un punto di estremo locale, sia $r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subset \Omega$.
Consideriamo, per $k = 1, \dots, n$, la funzione $(-r, r) \ni t \mapsto f(x_0 + t e_k)$.
Questa funzione è derivabile in $t = 0$, e ha un punto di estremo locale (minimo o massimo) in $t = 0$. Allora per il teorema di Fermat per $n = 1$ (Epsilon 1, Teorema 6.48), segue che la derivata è 0.
Ossia, $D_k f(x_0) = 0$ per tutti $k = 1, \dots, n$.

Anche se $\nabla f(x_0) = 0$, non è detto che x_0 sia un punto di $\begin{smallmatrix}\min\\ \max\end{smallmatrix}$ locale.
Infatti, sia $f(x, y) = x^3$. $\nabla f(x, y) = (3x^2, 0)$. Dunque $(0, y)$ sono punti critici, ma non sono punti di $\begin{smallmatrix}\min\\ \max\end{smallmatrix}$. Infatti, se $x \lessgtr 0$, $f(x, y) \lessgtr 0$.

Esempio $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Punto critico $(0, 0)$.
Ma $(0, 0)$ non è né un punto di $\left[\begin{smallmatrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{smallmatrix}\right.$
Infatti, se $x \neq 0$, $y = 0$, allora $f(x, y) > 0$.
$x = 0$, $y \neq 0$, < 0.
Ma $f(0, 0) = 0$.



Corollario Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$. Se x_0 è un punto di estremo locale, allora o (1) x_0 è alla frontiera. ($\Omega \setminus \mathrm{int}\,\Omega$, dove $\mathrm{int}\,\Omega$ è l'insieme dei punti interni).
(2) f non è derivabile in x_0.
(3) x_0 è un punto critico di f.
dim) Se x è interno ed f è derivabile, allora vale (3). Altrimenti (1) o (2).

Esempi $f(x, y) = x^2 + y^2$. $\Omega = \{\|(x, y)\| \leq 1\}$. $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$.
$f(x, y) = \|(x, y)\|$. Dunque $(1, 0)$ è un punto di massimo di f in Ω anche se non è critico.
$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\Omega = \mathbb{R}^2$. $(0, 0)$ è un punto di minimo di f in Ω, ma ∇f non esiste in $(0, 0)$.

AM2 Lezione 17 Derivate del secondo ordine 2025.10.28

Def Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. $x_0 \in \Omega$ interno. $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \|w\| = 1$.

(i) Supponiamo che $D_v f$ esiste in un intorno di x_0. ($B_r(x_0)$ per qualche $r>0$).
Se $D_w(D_v f)(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_v(x_0 + tw) - D_v(x_0)}{t}$ esiste, si dice la derivata direzionale del secondo ordine, o derivata direzionale seconda.

(ii) In particolare, nel caso $e_j = v$, $e_k = w$, si chiama la derivata parziale seconda.
$$D_{e_j}(D_{e_k} f)(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_k f(x_0 + te_j) - D_k f(x_0)}{t} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) =: D^2_{jk} f(x_0) =: D_j D_k f(x_0)$$

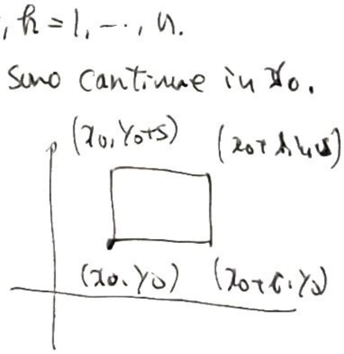
(iii) f si dice due volte differenziabile in x_0 se è differenziabile in un intorno di x_0 e tutte le $D_k f(x)$ sono differenziabili in x_0. $k = 1, \dots, n$.

(iv) Sia Ω aperto. Se le derivate parziali di f in Ω esistono e sono continue, f si dice di classe C^1. Se esistono le derivate parziali seconde esistono e sono continue, f si dice di classe C^2.

Esempi
- $f(x,y) = e^{xy^2}$. $D_x f(x,y) = y^2 e^{xy^2}$, $D_y f(x,y) = 2xy e^{xy^2}$.
  $D_x D_x f(x,y) = y^4 e^{xy^2}$, $D_y D_x f(x,y) = (2xy^3 + 2y) e^{x^2y^2}$.
  $D_x D_y f(x,y) = (2y + 2xy^3) e^{xy^2}$, $D_y D_y f(x,y) = (2x + 4x^2y^2) e^{xy^2}$.

- Sia $f(x) = \|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ su $\mathbb{R}^n$. f è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
  $D_k f(x) = x_k/\|x\|$. $D_j D_k = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_k^2}{\|x\|^3} & \text{se } j = k \\ -x_j x_k/\|x\|^3 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$

Teo (di Schwarz) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ interno. $j, k = 1, \dots, n$.
Supponiamo che f sia due volte differenziabile e $D_j D_k f$, $D_k D_j f$ sono continue in x_0.
Allora $D_j D_k f(x_0) = D_k D_j f(x_0)$.



dim) Consideriamo il caso $n = 0$, $f(x,y)$. (x_0, y_0).
Siano t, s piccoli, $G(x) = f(x, y_0 + s) - f(x, y_0)$.
Allora $G'(x) = D_x f(x, y_0 + s) - D_x f(x, y_0)$. Per il teorema del valor medio, applied to G, esiste θ_1, $0 \le \theta_1 \le 1$, t.c.
$$f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0+s) + f(x_0, y_0)$$
$$= G(x_0+t) - G(x_0) = tG'(x_0 + \theta_1 t) = t\left(D_x f(x_0+\theta_1 t, y_0+s) - D_x f(x_0+\theta_1 t, y_0)\right)$$
Sia $H(y) = D_x f(x_0 + \theta_1 t, y)$. Esiste φ_1, $0 \le \varphi_1 \le 1$. t.c.
$$\dots = t \cdot s\, D_y D_x f(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \varphi_1 s).$$

Analogamente, esistono θ_2, φ_2, $0 \le \theta_2, \varphi_2 \le 1$, t.c.
$f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0, y_0+s) - f(x_0+t, y_0) + f(x_0, y_0) = st\, D_x D_y(x_0+\theta_2 t, y_0+\varphi_2 s)$.
Ossia, $D_x D_y(x_0+\theta_2 t, y_0+\varphi_2 s) = D_y D_x(x_0+\theta_1 t, y_0+\varphi_1 s)$.
Per $t, s \to 0$, per continuità di $D_x D_y f$ e $D_y D_x f$ in (x_0, y_0), i limiti tendono a $D_x D_y f(x_0, y_0) = D_y D_x f(x_0, y_0)$.

Def Sia f differenziabile in x_0. La matrice

$$D^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x_0) & D_1 D_2 f(x_0) & \cdots & D_1 D_n f(x_0) \\ D_2 D_1 f(x_0) & & & \\ \vdots & & & \\ D_n D_1 f(x_0) & \cdots & \cdots & D_n D_n f(x_0) \end{pmatrix}$$

si dice matrice Hessiana $Hf(x_0)$ di f in x_0.

Esempio $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$.
$D_x f(x,y) = 3x^2 + y$, $D_y f(x,y) = x + 2y$.

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D^2 f(2,3) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$D_x D_y f(0,0) \neq D_y D_x f(0,0)$ Infatti,

$$D_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y(x^2-y^2) + 2x^2 y)(x^2+y^2) - 2x^2 y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$D_x f(0,y) = \begin{cases} -y. & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad D_y D_x f(0,0) = -1.$$

$$D_y f(x,0) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \qquad D_y D_x f(0,0) = 1.$$

- Calcolare la Hessiana $f(x,y) = e^{x+y^2+xy}$.

$D_x f(x,y) = (1+y) e^{x+y^2+xy}$, $D_y f(x,y) = (2y+x) e^{x+y^2+xy}$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (1+y)^2 e^{x+y^2+xy} & (1+(1+y)(2y+x)) e^{x+y^2+xy} \\ (1+(2y+x)(1+y)) e^{x+y^2+xy} & (2+(2y+x)^2) e^{x+y^2+xy} \end{pmatrix}$$

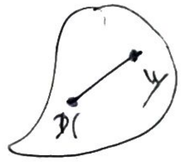
AM2 Lezione 18 Polinomio di Taylor del secondo ordine 2025.10.30

(Epsilon2, Sez 1.11).

Sia $f(x)$ una funzione su $\mathbb{R}$, due volte derivabile in x_0. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \text{ per } x\to x_0. \text{ (Peano)}.$$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$.



<u>Teo</u> (di Lagrange). Siano $x, y\in\Omega$, e supponiamo che il segmento $[x,y]\subset\Omega$. Supponiamo che f è continua in $[x,y]$, differenziabile in (x,y).

Allora $\xi\in(x,y)$ esiste t.c. $f(y)-f(x)=\nabla f(\xi)\cdot(y-x)$. $[x,y]=\{x+t(y-x): 0\le t\le 1\}$

dim) Poniamo $v = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $g(t)=f(x+tv)$. $(x,y)=\{x+t(y-x): 0<t<1\}$

Allora g è continua in $[0,\|y-x\|]$ derivabile in $(0,\|y-x\|)$ Per il teorema di Lagrange in $\mathbb{R}$ esiste $c\in(0,\|y-x\|)$ t.c. $\underbrace{g(\|y-x\|)-g(0)}_{f(y)-f(x)} = g'(c)(\|y-x\|-0)$

$\xi = x + cv$.

$$= D_v f(x+cv)(\|y-x\|) = \nabla f(\xi)\cdot(y-x)$$

<u>Teo</u> (sviluppo di Taylor del secondo ordine). Siano $x_0\in\Omega$, f classe C^2 in un intorno di x_0.

Allora $f(x)=f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}\langle D^2f(x_0)(x-x_0),(x-x_0)\rangle + o(\|x-x_0\|^2)$

per $x\to x_0$ (il resto di Peano).

dim). Poniamo $R(x) = f(x) - \left(f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}\langle D^2 f(x_0)(x-x_0),(x-x_0)\rangle\right)$

Siccome f è due volte differenziabile, R è differenziabile in $B_r(x_0)$. $r>0$.

Sia $x\in B_r(x_0)$. Per il teorema di Lagrange, esiste $\xi\in[x_0,x]$ t.c.

$R(x)=R(x)-R(x_0)=\nabla R(\xi)\cdot(x-x_0)$.

$D_k R(x) = D_k f(x) - D_k f(x_0) - \sum_{j=1}^n D_jD_k f(x_0)(x_j-x_{0,j}) =$

Perché $\langle D^2 f(x_0)(x-x_0),(x-x_0)\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n D_jD_kf(x_0)(x_k-x_{0,k})(x_j-x_{0,j})$

$= D_kf(x)-D_kf(x_0)-\nabla D_kf(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Siccome D_kf è differenziabile in x_0, si ha $\frac{D_kR(x)}{\|x-x_0\|}\to 0$ per $x\to x_0$.

Dunque $\left|\frac{R(x)}{\|x-x_0\|^2}\right| = \left|\frac{\nabla R(\xi)\cdot(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2}\right| \le \sum_{k=1}^n \frac{D_kR(\xi)(x_k-x_{0,k})}{\|x-x_0\|^2} \le \sum_{k=1}^n \frac{D_kR(\xi)(x_k-x_{0,k})}{\|\xi-x_0\|\cdot\|x-x_0\|}$

$\to 0$ per $x\to x_0$.

<u>Esempi/Esercizi</u>

- Sia $A=(A_{jk})_{j,k=1}^n$. $Ax = \left(\sum_{k=1}^n A_{1k}x_k, \sum_{k=1}^n A_{2k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{nk}x_k\right)$.

  $D_k(\langle Ax,x\rangle) = \sum_{j=1}^n A_{jk}x_j + \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell}x_\ell$.

- $\Omega=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=e^{xy}\cos y$. Determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine per $(0,0)$.

$f(x,y) = e^{3x-y^2}$ per $x_0 = (0,0)$

$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3$, $x_0 = (1,2)$.

- $f(x,y,z) = xy^2z^3$. por $x_0 = (1,1,1)$.

AM2 Lezione 19 Matrici simmetriche (Sez. 1.12) 2023.11.03

Sia $A = \{A_{j,k}\}$ una matrice. A si dice simmetrica se $A_{kj} = A_{jk}$ per tutti $k,j = 1,\dots,n$.
Sia A simmetrica. La funzione $Q_A(v): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da
$Q_A(v) = Av \cdot v \,(= \langle Av, v \rangle) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} v_j v_k$
si dice forma quadratica associata a A.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Def. A si dice
- definita positiva se $Q_A > 0$ per tutti $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.
- semidefinita positiva $\geq$
- definita negativa $<$
- semidefinita negativa $\leq$
- indefinita se nessuno di questi, ossia ci sono $v, w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Q_A(v) < 0 < Q_A(w)$.

Esempi. $\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva. Infatti, $Q_A(v) = \sum_{j,k=1}^{2} A_{jk} v_j v_k = 3v_1^2 + 2v_2^2 > 0$ se $(v_1, v_2) \neq (0,0)$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ è indefinita. Infatti, $Q_A(v) = \sum_{j,k=1}^{2} A_{jk} v_j v_k = v_1^2 - 4v_1v_2 + v_2^2$
$Q_A((1,1)) = -2 < 0 < 1 = Q_A((1,0))$

Def. Si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A se esiste $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ (autovettore corrispondente a λ) t.c. $Av = \lambda v$.

Teo Se A è simmetrica, A è "diagonalizzabile", ossia
- Esiste una matrice ortogonale O (t.c. $O^T O = \mathbb{1} = O O^T$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$), t.c. $OAO^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A.
- C'è una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$, ossia $v_j \cdot v_k = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, di autovettori di A.

Teo Sia A simmetrica.
(i) A è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori λ_j di A soddisfano $\lambda_j > 0$
(ii) semi def. ≥ 0
(iii) negativa < 0
(iv) semi ≤ 0
(v) A è indefinita se ci sono autovalori negativi e positivi.

dim) Vediamo (i). Sia A definita positiva e sia v un autovettore, con l'autovalore λ. Allora $0 < Q_A(v) = Av \cdot v = \lambda v \cdot v$. Viceversa, supponiamo che tutti gli autovalori

⊛

Poniamo $\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ ossia $\mathbb{1} = (\delta_{jk})$.

Ricordiamo che $\det(A) = \det(OAO^{-1}) = \det(OAO^t)$ se O è ortogonale ($O^t = O^{-1}$).

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Abbiamo $\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det(O(A-\lambda\mathbb{1})O^t) = \det(OAO^t - \lambda\mathbb{1}) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-\lambda)$,

se $OAO^t = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$. L'equazione $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$ si dice l'equazione caratteristica di A.

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica.

Esempi $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2-4 = \lambda^2-2\lambda-3=0 \iff \lambda = 1\pm\sqrt{2}$.

$A = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)=0 \iff \lambda = 2,3$.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad \det(A-\lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^3-(2-\lambda)-(2-\lambda)+0 = (2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-2)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2)=0.$$

$\lambda = 2,\ 2\pm\sqrt{2},\ >0$.

Per il caso $n=2$, ci sono criteri semplici.

Teo Sia $A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ una matrice simmetrica. $\operatorname{tr} A = a+c$, $\det A = ac-b^2$.

(i)	A è definita positiva	se $\det A > 0$	e $\operatorname{tr} A > 0$
(ii)	semi	≥ 0	$\geq$
(iii)	definita negativa	> 0	$<$
(iv)	semi	≥ 0	$\leq$
(v)	è indefinita	< 0.	

dim) Si nota che, $\det A = \det(OAO^t) = \lambda_1\cdot\lambda_2$, mentre $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} OAO^t = \lambda_1+\lambda_2$

Per (i). A è definita positiva $\iff \lambda_1, \lambda_2 > 0 \iff \lambda_1\cdot\lambda_2 > 0$ e $\lambda_1+\lambda_2 > 0$.

Gli altri sono simili.

Esempi Determinare il segno.

$A = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

⊛ $\lambda_1 \geq \cdots \lambda_n > 0$. w_j autovettori.

Sia $x = \sum_j x_j w_j$. Allora $Q_A(x) = \sum_j \lambda_j x_j w_j \cdot \sum x_j w_j$

$= \sum \lambda_j x_j^2 \geq \lambda_n \sum x_j^2 = \lambda_n \|x\|^2$.

Gli altri casi sono analoghi

AM2 Lezione 20 Estremi liberi (Epsilon 2, Sez 1.13) 2025.11.2.

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. $x_0 \in \Omega$.

<u>Oss</u> x_0 è un punto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ locale $\iff f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0)$ per $x \in B_r(x_0)$, qualche r. $\iff f(x) - f(x_0) \underset{\geq 0}{\leq 0}$

non è estremo $f(x) - f(x_0)$ cambia segno in ogni intorno.

<u>Teo</u>. Sia $x_0 \in \Omega$ interno e f sia C^2 in un intorno $B_r(x_0)$ per qualche $r>0$, x_0 un punto critico di f.

(i) Se $Hf(x_0)$ è definita positiva, allora x_0 è un punto di minimo locale (stretto) di f.

(ii) negativa massimo.

(iii) indefinita, x_0 non è un punto di estremo locale.

dim). Per queste ipotesi, vale lo sviluppo di Taylor con il resto di Peano, per $x \in B_r(x_0)$.

$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0)(x - x_0) \cdot (x_0 - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$.

Siccome x_0 è critico, ossia $\nabla f(x_0)$, abbiamo $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} Hf(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$.

(i) Sia $Hf(x_0)$ definita positiva. Allora il autovalore minimo di $Hf(x_0) > 0$.

Siano $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ gli autovalori di $Hf(x_0)$. Allora, abbiamo $\frac{1}{2} Hf(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_0) > \frac{\lambda_n}{2} \|x - x_0\|^2$.

Allora esiste $r' > 0$ t.c. $f(x) - f(x_0) \geq \frac{\lambda_n}{2} \|x - x_0\|^2 + o(\|x - x_0\|^2) > 0$ per $x \in B_{r'}(x_0)$.

Ossia x è un punto di minimo locale.

(ii) analogo.

(iii) Sia $Hf(x_0)$ indefinita. $\lambda_1 > 0 > \lambda_n$ autovalori. con autovettori v_1, v_n.

Allora $Hf(x_0) v_j \cdot v_j = \lambda_j \|v_j\|^2$.

Per $x = t v_1 + x_0$, abbiamo $f(x) - f(x_0) = \frac{\lambda_1}{2} t^2 + o(t^2) > 0$ per t piccolo,

Analogamente, per $x_0 = t v_n + x_0$, $f(x) - f(x_0) < 0$ per t piccolo.

Dunque x_0 non può essere un punto di estremo locale.

<u>Oss</u> per usare il criterio, non basta che $Hf(x_0)$ sia semidefinita.

$f(x,y) = (y - 2x^2)(y - x^2) = 2x^4 - 3x^2 y + y^2$.

$\nabla f(x,y) = (8x^3 - 6xy, -3x^2 + 2y)$. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\nabla f(0,0) = (0,0)$. $(0,0)$ è un punto critico, e $Hf(0,0)$ è semidefinita positiva.

ma $(0,0)$ non è un punto di minimo locale. Infatti,

$f(0,0) = 0$, $f(\frac{1}{k}, 0) = \frac{2}{k^4} > 0$, $f(\frac{1}{k}, \frac{1.5}{k^2}) = \frac{2}{k^4} - \frac{4.5}{k^4} + \frac{2.25}{k^4} = -\frac{0.25}{k^4} < 0$.

Quando x_0 è un punto critico ma non è un punto di estremo locale, x_0 si dice un punto di sella. Per (iii), se $Hf(x_0)$ è indefinita, e $\nabla f(x_0) = 0$, x_0 è un punto di sella.

Esempi/esercizi. Trovare i punti critici e classificarli.

- $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8.$

  $(x_0,y_0) = (0,0), (1,0), (-1,0).$

  $Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

- $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - 2y^2 + x^2y^2 + z^2 - 2y^2z^2.$

  $(x_0,y_0) = (0,0,0),\ (0,\frac{4}{3},0).$

  $Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{50}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{46}{9} \end{pmatrix}.$

- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1.$ $\quad \nabla f(x,y) = (2x-y, -x+2y)$ $\quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

  $(x_0,y_0) = (0,0).$

  Epsilon 2 P.63 ??

- $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^4 + 1,$ $\quad \det Hf(0,0) = 0$

  $(x_0,y_0) = (0,0).$

  $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 1 = (x^2-y^2)^2 + x^2y^2 + 1.$

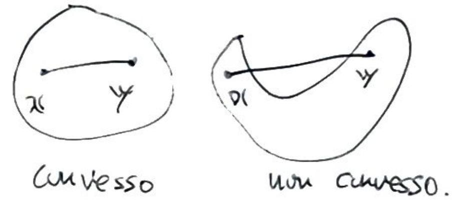
  $(0,0)$ minimo.

AM2 Lezione 21 Insiemi convessi e funzioni convesse 2025.11.06

(Epsilon 2 sez 1.14).

Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice convesso se, per ogni $x, y \in \Omega$, $[x, y] \subset \Omega$, dove $[x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$.

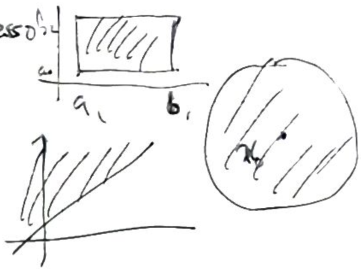
Per $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty$ si dice la combinazione convessa di x, y.



Esempi · Per $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ è convesso.

· Per $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $B_r(x_0)$ è convesso.

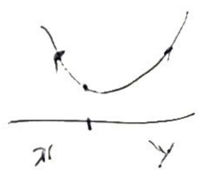
· Per $a, b \in \mathbb{R}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ax + b\}$ è convesso.



Def. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

f si dice convessa se, per ogni $x, y \in \Omega$, $t \in [0,1]$, vale che
$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y).$$

In altre parole, la combinazione convessa dei punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ è sopra f nella combinazione convessa $(1-t)x + ty$.



· Strettamente convessa se $<$ per $t \in (0,1)$

concava $\geq$

strettamente concava $>$

Oss. f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$, la funzione $g(t) = f((1-t)x + ty)$ su $t \in [0,1]$ è convessa. Infatti la definizione riguarda $[x, y]$, per tutti $x, y \in \Omega$.

f è convessa se e solo se $-f$ è concava.

Teo Siano $\Omega \in \mathbb{R}^n$, convesso e aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ due volte differenziabile:

(i) $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva per tutti $x \in \Omega$ se e solo se f è convessa in Ω.

(ii) Se definita positiva, allora strettamente convessa.

(iii) semidefinita negativa se e solo se concava

(iv) Se definita negativa, allora strettamente concava.

dim) Siano x, y, $g(t) = f((1-t)x + ty)$. Allora g è due volte differenziabile.

Inoltre $g'(t) = \nabla f((1-t) \cdot x + ty) \cdot (y - x)$. Infatti, $g(t) = f \circ \gamma(t)$, dove $\gamma(t) = (1-t)x + ty$.

Ossia $(\gamma_1(t), \dots \gamma_n(t)) = ((1-t)x_1 + ty_1, \dots (1-t)x_n + y_n)$, quindi $\gamma'(t) = (y_1 - x_1, \dots y_n - x_n)$ $= y - x$. $g'(t) = \sum_{j=1}^n D_j f((1-t)x + ty)(y_j - x_j)$. Ripetiamo l'argomento e

$g''(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nabla_k D_j f((1-t)x + ty)(y_j - x_j)(y_k - x_k) = (H_f((1-t)x + ty) \cdot (y - x)) \cdot (y - x)$.

Per Corollario 6.86 di Epsilon 1, g è convessa se e solo se $g''(t) \geq 0$ per tutti t.

Dunque, $g''(t) \geq 0$ per tutti t, x, y se e solo se $Hf((1-t)x + ty)$ è semidefinita positiva. Altre affermazioni sono simili.

<u>Esempi / Esercizi</u>. Stabilire se la funzione è concava/convessa...

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$. $\quad Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$, $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(1-x^2-y^2)^2} \right)$$

$$Hf(x,y) = \frac{2}{(1-x^2-y^2)^3} \begin{pmatrix} 1+3x^2-y^2 & 4xy \\ 4xy & 1-x^2+3y^2 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{tr} Hf(x,y) > 0$.

$\det Hf(x,y) = \dfrac{4}{(1-x^2-y^2)^6} \left(1 + 2(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2)^2 \right)$. $\quad t = x^2+y^2$

$h(t) = 1 + 2t - 3t^2 \quad h'(t) = 2 - 6t. \quad h'(t) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ se $\begin{cases} t < \frac{1}{3} \\ t > \frac{1}{3} \end{cases}$.

$h(0) = 1, \ h(1) = 0. \quad h(t) > 0$ per $t \in (0,1)$.

$Hf(x,y) > 0$. $\quad$ strettamente convessa.

$f(x,y) = 5x^2 + 3x^3 + x^4 + y^6 - xy + y^2$

$\nabla f(x,y) = (10x + 9x^2 + 4x^3 - y, \ 6y^5 - x + 2y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 10 + 18x + 12x^2 & -1 \\ -1 & 30y^4 + 2 \end{pmatrix}.$$

$h(x) = 10 + 18x + 12x^2$, $h'(x) = 18 + 24x$. min in $x = -\frac{3}{4}$. $h(-\frac{2}{3}) = 10 - 12 + \frac{16}{3} > 3 > 0$.

$\det Hf(x,y) > 3 \cdot 2 - 2 = 4 > 0$.

$\operatorname{tr} Hf(x,y) > 3 + 2 = 5 > 0$. $\quad$ strettamente convessa.

AM2 Lezione 22 Funzione implicita (Epsilon2 cap 3) 2025.11.10.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. $\Gamma_c = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = c\}$ si dice l'insieme di livello.
Spesso gli insiemi di livello sono curve.

Esempi.. - Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $f(x,y) = \alpha x + \beta y$.
Per $c \in \mathbb{R}$, l'equazione $\alpha x + \beta y = c$ definisce $y = (c - \alpha x)\frac{1}{\beta} = \varphi(x)$.

- Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$, Per $c > 0$, l'equazione $x^2 + y^2 = c$ non definisce una funzione di x, ma localmente, per esempio per $y > 0$, definisce $y = \sqrt{c - x^2} = \varphi(x)$.
Per $c = 0$, $\Gamma_c = \{(0,0)\}$.

Quando questo è possibile?

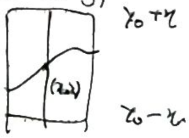
Teo (di Dini in $\mathbb{R}^2$, parte I).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Supponiamo che $D_y f$ esista e f e $D_y f$ siano continue in Ω e $\boxed{f_y(x_0, y_0) \neq 0}$. Allora esistono $\sigma, \eta > 0$ e $\varphi: (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \to (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0) (=: C)$ per $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$. Inoltre,

(i) φ è continua in $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$

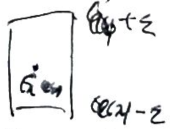
(ii) Se f è di classe C^1, allora φ lo è e $\varphi'(x) = -\dfrac{D_x f(x, \varphi(x))}{D_y f(x, \varphi(x))}$ per $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$.

In altre parole, $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ garantisce l'esistenza locale di funzione implicita $\varphi(x)$, t.c. $f(x, \varphi(x)) = C$.

dim) Sia $D_y f(x_0, y_0) > 0$ (il caso $<$ è analogo). Per la permanenza del segno di $D_y f$, continua in (x_0, y_0), esiste $\sigma_0, \eta > 0$ t.c. $D_y f(x,y) > 0$ per $(x,y) \in (x_0 - \sigma_0, x_0 + \sigma_0) \times (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$.
Dunque la funzione $y \mapsto f(x_0, y)$ è strettamente crescente in $[y_0 - \eta, y_0 + \eta)$,
$f(x_0, y_0 - \eta) < C$, $f(x_0, y_0 + \eta) > C$ Sempre per la permanenza del segno, per la continuità di f, esiste $\sigma > 0$ t.c. per $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$, $f(x, y_0 - \eta) < C$, $f(x, y_0 + \eta) > C$



Siccome, per ogni $x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$, $y \mapsto f(x,y)$ è strettamente crescente, esiste un unico $\varphi(x)$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = C$



(i) Si ripete l'argomento per $(x, \varphi(x))$ al posto di (x_0, y_0), ε al posto di η. Si ottiene δ t.c. $\varphi(x_1) \in (\varphi(x) - \varepsilon, \varphi(x) + \varepsilon)$ se $x_1 \in (x - \delta, x + \delta)$

(ii) Sia f di classe $C^1(\Omega)$. Sia $x \in (x_0 - \sigma, x + \sigma)$, h piccolo.
Allora, per il teorema del valor medio applicato a f sul segmento $[(x, \varphi(x)), (x+h, \varphi(x+h))]$ e esiste (ξ_0, η_0) t.c. $0 = f(x+h, \varphi(x+h)) - f(x, \varphi(x)) = \nabla f(\xi_0, \eta_0) \cdot (h, \varphi(x+h) - \varphi(x))$.
Perciò $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\dfrac{D_x f(\xi_0, \eta_0)}{D_y f(\xi_0, \eta_0)}$. Per $h \to 0$, $(\xi_0, \eta_0) \to (x, \varphi(x))$.

Oss Una volta stabilità l'esistenza di $\varphi(x)$, possiamo calcolare $\varphi''(x)$ se f è di C^2.

Infatti, $\varphi''(x) = -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{D_x f(x,\varphi(x))}{D_y f(x,\varphi(x))}\right)$

$$= -\frac{\big(D_xD_x f(x,\varphi(x)) + D_yD_x f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)D_y f(x,\varphi(x)) - D_x f(x,\varphi(x))\big(D_yD_y f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + D_xD_y f(x,\varphi(x))\big)}{D_y f(x,\varphi(x))^2}$$

Analogamente, se f è di Classe C^k, lo è anche φ.

Oss I ruoli di x e y si possono scambiare.

Def Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. f classe C^1. $(x_0, y_0) \in \Omega$ si dice un punto regolare se $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, singolare se $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

Se $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, allora o $D_x f(x_0,y_0) \neq 0$ o $D_y f(x_0,y_0) = 0$.

Dunque si può trovare $\gamma(t)$ t.c. $f(\gamma(t)) = f(x_0,y_0)$ per $t \in (-r, r)$.

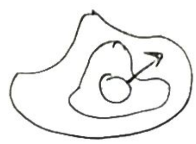
$\gamma'(t)$ è la retta tangente all'insieme di livello Γ_c, $c = f(x_0,y_0)$.

Teo (di Dini parte II).

$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. In particolare, $\nabla f(\gamma(t))$ è ortogonale alla retta tangente

dim) Se $D_y f(x_0,y_0) \neq 0$, si prende $\gamma(t) = (t - x_0, \varphi(t-x_0))$.

Per definizione, $f(\gamma(t)) = f(x_0,y_0)$.



La retta tangente è data da $D_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_y f(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$

Esempio $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$, $a, b > 0$.

Prendiamo $c = 1$. $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right) \neq 0$ per tutti $(x,y) \neq (0,0)$.

Sia (x_0, y_0) t.c. $f(x_0,y_0) = 1$. $y_0 > 0$.

Abbiamo $y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

Esercizi Trovare l'espressione per la funzione $\varphi(x)$ o $\psi(y)$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = 4$ o $f(\psi(y), y) = 4$, dove $f(x,y) = x^2 y$, $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$.

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello nel punto $(2,1)$

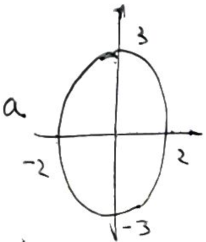
- $f(x,y) = x^3 - 3xy^5 - 2y$
- $f(x,y) = (x-y)\log(e + xy - x^2 + 2y^2) - 1$.

AM2 Lezione 23 Estremi vincolati (sez 3.1) 2025.11.11

Abbiamo visto come trovare i punti di estremo di una funzione su un dominio aperto.
In pratica, si considerano problemi di ottimizzazione sotto vincoli.
Per esempio, qual è la forma di una lattina (raggio r e altezza h) con la minima area col volume 33cl.? (minimizzare $2\pi r^2 + 2\pi r h$ sotto $2\pi r^2 h = 33$).

<u>Def</u>. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto, $\Gamma \subset \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. (Γ si chiama un vincolo)
Un punto $x_0 \in \Gamma$ si dice punto di $\left\{\begin{matrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{matrix}\right.$ locale di f vincolato a Γ se esiste un intorno $\mathcal{U}\ (= B_r(x_0))$ t.c. $f(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right. f(x)$ per $x \in \mathcal{U} \cap \Gamma$.
Si dice un punto di $\left\{\begin{matrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{matrix}\right.$ globale se $f(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right. f(x)$ per $x \in \Gamma$.

Spesso si considera $\Gamma = \Gamma_c = \{g(x) = c\}$ per qualche $g: \Omega \to \mathbb{R}$.



<u>Esempio</u> Trovare i punti di massimo/minimo di $f(x,y) = 3x + 4y + 1$ vincolati a $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 = 36\}$ (ellisse).
In questo caso, Γ si può scrivere come una curva
$\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. e studiare i punti di estremo di:
$f \circ \gamma(t) = 3(2\cos t) + 4(3\sin t) + 1$. Si può studiare con la derivata.
$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

Se il vincolo è più complicato e non si può scrivere esplicitamente come una curva?
<u>Teo</u> (Moltiplicatori di Lagrange) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, f, g di classe $C^1(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$, (x_0, y_0) un punto regolare di g ($\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$). Se (x_0, y_0) è un punto di estremo locale di f vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = c\}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.
λ si dice il moltiplicatore di Lagrange.
dim) Per il teorema di ieri, esiste $\gamma(t)$ su $(-\sigma, \sigma)$ per qualche $\sigma > 0$ t.c. $g(\gamma(t)) = c$.
Allora, siccome $f \circ \gamma(t)$ assume un punto estremo in $t = 0$, si ha
$0 = \frac{d}{dt} f \circ (\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t)$, dove $\gamma'(t)$ è un vettore tangente a Γ. D'altra parte, vale $\nabla g(\gamma(0)) \cdot \gamma'(t)$ come abbiamo visto ieri.
Dunque $\nabla f(\gamma(0))$ e $\nabla g(\gamma(0))$ sono ortogonali a $\gamma'(t) \neq 0$. e devono essere paralleli.

Come nel caso di estremi liberi, l'equazione $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$, $g(x_0, y_0) = c$ (3 equazioni per 3 variabili x_0, y_0, λ) dà candidati di punti di $\left\{\begin{matrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{matrix}\right.$ vincolato.

Cor. Siano Ω, f, g, c come prima. I punti di estremo locale vincolato sono (i) o f o g non sono C^1 (ii) $\nabla g_0(x_0, y_0) = 0$ (iii) si trova con moltiplicatore di Lagrange.

Esempi/esercizi • $f(x,y) = 3x+4y+1$, $g(x,y) = 9x^2+4y^2$, $c = 36$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
$\nabla f(x,y) = (3,4)$ $\nabla g(x,y) = (18x, 8y)$. Dobbiamo risolvere
$3 = \lambda 18 x_0$, $4 = \lambda 8 y_0$, $9x_0^2 + 4y_0^2 = 36$.
si ha $\frac{3}{4} = \frac{9}{4}\frac{x_0}{y_0}$, $y_0 = 3x_0$. $9x_0^2 + 36x_0^2 = 36$. $x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_0 = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$. $(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-6}{\sqrt{5}}\right)$

• $f(x,y) = xy - y^2 + 3$, $g(x,y) = x + y^2$, $c = 1$. $\Omega = \mathbb{R}^2$.
$\nabla f(x,y) = (y, x-2y)$, $\nabla g(x,y) = (1, 2y)$. Dobbiamo risolvere
$y_0 = \lambda \cdot 1$, $x_0 - 2y_0 = \lambda \cdot 2y_0$, $x_0 + y_0^2 = 1$.
$y_0 = \lambda$. $x_0 - 2y_0 = 2y_0^2$. $3y_0^2 + 2y_0 - 1 = 0$ $y_0 = -1, \frac{1}{3}$. $x_0 = 0, \frac{8}{9}$. $(x_0, y_0) = (0,-1), \left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right)$.
In realtà, $g(x,y) = x + y^2 = 1$ si può risolvere come $x = 1 - y^2 = \psi(y)$ e
$f(\psi(y), y) = (1-y^2)y - y^2 + 3 = -y^3 - y^2 + y + 3$, e i punti critici sono $-3y_0^2 - 2y_0 + 1 = 0$.
$\Rightarrow y_0 = -1, \frac{1}{3} \ldots\ldots$

Oss Dopo avere identificato i candidati per i punti di min/max, possiamo paragonare i valore di $f(x_0, y_0)$ per determinare quali sono massimo o minimo.
cf. Se Γ è compatto, esistono tali massimi e minimi.

Se il dominio Ω è chiuso, spesso si scrive Ω come l'unione $\Omega = \partial U \cup \operatorname{int} U$, dove $\partial U = \Gamma$ è la frontiera e una curva, $\operatorname{int} U$ è aperto.
La questione di trovare i punti di estremo di f su Ω si può considerare su ∂U e $\operatorname{int} U$ separatamente.

Se il vincolo si scrive astrattamente $\gamma(t)$ e se $\gamma(t_0)$ è un punto critico,

$$\frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma(t_0) = Hf(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \cdot \gamma'(t_0) + \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma''(t).$$

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} g \circ \gamma(t_0) = Hg(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \cdot \gamma'(t_0) + \nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma''(t)$$

Dunque
$$\frac{d^2}{dt^2} f \circ (\gamma(t_0)) = H(f - \lambda g)(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \cdot \gamma'(t_0).$$

Esercizi Determinare i punti di estremo locale vincolato.
• $f(x,y) = xy$, $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = 0\}$. • $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\Gamma = \{(x,y) : x^4 + y^8 = 5\}$

AM2 lezione 24 Funzioni implicite in $\mathbb{R}^3$ 2025.11.13

Funzioni implicite si possono definire anche in $\mathbb{R}^3$.

Esempi. • Siano $\alpha, \beta, \gamma_{\neq 0} \in \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Per $c \in \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = c$ definisce $z = \frac{1}{\gamma}(c - \alpha x - \beta y)$

• Sia $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Per $c > 0$, $f(x,y,z) = c$ definisce $z = \pm\sqrt{c-x^2-y^2}$. Si nota che spesso $\Gamma_c = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\}$ è una superficie.

Teo. (di Dini in $\mathbb{R}^3$).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, f, f_z continue in Ω. Supponiamo che $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Allora esistono un intorno $\mathcal{U}$ di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$, $\eta > 0$ e $\varphi : \mathcal{U} \to (z_0 - \eta, z_0 + \eta)$ t.c. $f(x,y,\varphi(x,y)) = f(x_0,y_0,z_0)$ per $(x,y) \in \mathcal{U}$. Inoltre,

(i) φ è continua in $\mathcal{U}$.

(ii) Se f è di $C^1(\Omega)$, allora $\varphi \in C^1(\Omega)$ e si ha per $(x,y) \in \mathcal{U}$

$$D_x\varphi(x,y) = -\frac{D_x f(x,y,\varphi(x,y))}{D_z f(x,y,\varphi(x,y))}, \quad D_y\varphi(x,y) = -\frac{D_y f(x,y,\varphi(x,y))}{D_z f(x,y,\varphi(x,y))}.$$

dim) Analogo a quello in $\mathbb{R}^2$.

Oss Se f è di $C^n(\Omega)$, allora φ è di $C^n(\mathcal{U})$.

Se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora scambiando i ruoli di x, y, z, si può trovare una funzione φ di due variabili t.c. $f(x, \varphi(x,z), z) = f(x_0,y_0,z_0)$ o simile. (se $D_y(x_0,y_0,z_0) \neq 0$).

Esempio • $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $c = 9$. $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,3)$.

$\varphi(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Infatti, $f(x,y,\varphi(x,y)) = x^2+y^2+(9-x^2-y^2) = 9 = f(x_0,y_0,z_0)$.

Estremi vincolati (con uno vincolo) in $\mathbb{R}^3$

Come abbiamo visto, se $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma_c = \{(x,y,z) \in \Omega : g(x,y,z) = c\}$ è spesso una superficie. Per $f : \Omega \to \mathbb{R}$, si può considerare i punti di $\begin{cases}\min\\ \max\end{cases}$ di f vincolati a Γ_c.

Sia $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_c$ e supponiamo, per fissare l'idea, che $D_z g(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Prendiamo $\varphi(x,y)$ come nel Teorema di Dini, e si considera la funzione $\Phi(x,y) = (x, y, \varphi(x,y)) \in \Gamma_c \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni y fisso, $x \mapsto \Phi(x,y)$ è una curva e $D_x\Phi(x,y) = (1, 0, D_x(x,y)) \neq 0$. è un vettore tangente a Γ_c. Analogamente,

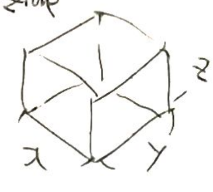
$D_y\Phi(x,y) = (0, 1, D_y(x,y)) \neq 0$.

Consideriamo $x \mapsto g(\Phi(x,y))$. Per la regola di catena, $\nabla g(\Phi(x,y))\cdot(1,0,D_x\varphi(x,y))=0$.
$y \mapsto g(\Phi(x,y))$ $\qquad \nabla g(\Phi(x,y))\cdot(0,1,D_y\varphi(x,y))=0$.
Dunque $\nabla g(\Phi(x,y))$ è ortogonale al piano tangente di Γ_c in $(x,y,\varphi(x,y))$.

<u>Teo</u> (moltiplicatori di Lagrange).
Siano $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ aperto, $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma_c$. f,g $C^1(\Omega)$.
Se $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, e se (x_0,y_0,z_0) è un punto di $\left\{\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\right.$ locale di f vincolato a Γ_c,
allora esiste λ t.c. $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$.
dim) Analogo, con $\nabla f(\Phi(x_0,y_0,z_0))\cdot(1,0,D_x\varphi(x,y))=0$
$\nabla f(\Phi(x_0,y_0,z_0))\cdot(0,1,D_y\varphi(x,y))=0$..

<u>Esempi / esercizi</u> Trovare punti di massimo/minimo vincolati di f a $\Gamma_c=\{g(x,y,z)=c\}$.
- $\Omega=\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=x-3z$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2$, $c=4$.
$\nabla f(x,y,z)=(1,0,-3)$, $\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,8z)$.
Se $x_0^2+y_0^2+4z_0^2=4$, $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Si considera.
$x_0^2+y_0^2+4z_0^2=4$, $(1,0,-3)=\lambda(2x_0,2y_0,8z_0)$.
$\left\{\begin{array}{l}\lambda=0. \text{ non è possibile.}\\ y_0=0,\ 1=2\lambda x_0,\ -3=8\lambda z_0.\quad \frac{1}{4\lambda^2}+0^2+4\cdot\frac{9}{64\lambda^2}=4\Rightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt{13}}{8}\end{array}\right.$
$(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{4}{\sqrt{13}},0,-\frac{3}{\sqrt{13}}\right),\left(-\frac{4}{\sqrt{13}},0,\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
$f\left(\frac{4}{\sqrt{13}},0,-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\frac{4}{\sqrt{13}}+\frac{9}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$, $f\left(-\frac{4}{\sqrt{13}},0,\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=-\sqrt{13}$. Γ_c è compatto.

- Massimizziamo il volume della piscina con $x\times y\times z$ avendo a disposizione piastrelle per $\alpha^2(m^2)$. .. $\qquad x,y,z>0$.



$f(x,y,z)=xyz$, $g(x,y,z)=xy+2yz+2zx=\alpha^2$.
$\nabla g(x,y,z)=(y+2z,\ x+2z,\ 2y+2x)\neq 0$.
$\nabla f(x,y,z)=(yz,zx,xy)$. Si ha, per un punto critico, (x_0,y_0,z_0),
$x_0y_0+2y_0z_0+2z_0x_0=\alpha^2$, $y_0z_0=\lambda(y_0+2z_0)$, $z_0x_0=\lambda(x_0+2z_0)$, $x_0y_0=\lambda(2y_0+2x_0)$
$(x_0-y_0)z_0=\lambda(x_0-y_0)\left\{\begin{array}{l}\cdot\ x_0=y_0\Rightarrow x_0=2z_0\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt3},\frac{\alpha}{\sqrt3},\frac{\alpha}{2\sqrt3}\right).\\ \cdot\ z_0=\lambda\Rightarrow\lambda=0 \text{ impossibile.}\end{array}\right.$
È un punto di massimo, perché se $(x,y,z)\to\infty$ o $\frac{1}{z}\to 0$, $f(x,y,z)\to 0$.

Esercizi · $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z)=xyz^2-2=0$.

AM2 Lezione 25 Due vincoli in $\mathbb{R}^3$ (Epsilon sez 3.6-3.7) 2025.11.17

In $\mathbb{R}^3$, abbiamo visto che un vincolo $g(x,y,z)=c$ (o si può scrivere $g(x,y,z)-c=0$) definisce una superficie. Se ne abbiamo due, l'intersezione di due superfici è spesso una curva.

Esempi Consideriamo il sistema di due equazioni lineari $\begin{cases} g(x,y,z) := \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0 \\ h(x,y,z) := \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0 \end{cases}$
$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$ $(j=1,2)$.

Se il vettore $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq 0$, allora $g(x,y,z)=0$ definisce una superficie ortogonale al vettore $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. (Infatti, se $\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0 - \delta_1 = 0$ e (ξ, η, ζ) e $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sono ortogonali, allora $= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\cdot(x_0, y_0, z_0) - \delta_1$.
$g(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta) = 0$. $0 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\cdot(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta) - \delta_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\cdot((x_0, y_0, z_0)+(\xi, \eta, \zeta)) - \delta_1$

Una considerazione analoga vale per $g(x,y,z)=0$.

Dunque, $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$ definisce la retta ortogonale a $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.
se $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sono linearmente indipendenti.

Questa ultima condizione significa che due piani non sono paralleli.

Si nota che $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \nabla g(x,y,z)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \nabla h(x,y,z)$.

Teo (di Dini in $\mathbb{R}^3$ con due vincoli)

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ di $C^1(\Omega)$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $g(x_0, y_0, z_0) = 0 = h(x_0, y_0, z_0)$

Supponiamo che $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\nabla h(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, linearmente indipendenti. ("punto regolare")

Allora esistono $I \subset \mathbb{R}$, una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $g \circ \gamma(t) = 0$, $h \circ \gamma(t) = 0$.

Inoltre, $\gamma'(t) \neq 0$ e $\nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 = \nabla h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

Estremi vincolati in $\mathbb{R}^3$ con due vincoli

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g, h di $C^1(\Omega)$. $\Gamma = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$, $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ regolare.

Vogliamo determinare i punti di $\begin{cases}\text{minimo}\\ \text{massimo}\end{cases}$ di f vincolato a Γ.

Allora Γ si può rappresentare come una curva $\gamma : I \to \Gamma$, localmente, e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Vale che $0 = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$: Allora $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ è una combinazione lineare di $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$.

Teo (moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^3$ con due vincoli).

Siano Ω, f, g, h, Γ, (x_0, y_0, z_0) come sopra. Se (x_0, y_0, z_0) è un punto di $\begin{cases}\text{minimo}\\ \text{massimo}\end{cases}$ locale di f vincolato a Γ, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} g(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ h(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Esempi/esercizi Determinare i punti di $\left[\begin{matrix}\text{minimo}\\ \text{massimo}\end{matrix}\right.$ locale di f vincolato a $\Gamma = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = x^2 - y + 2z^2$, $h(x,y,z) = y + z - 1$. (x_0, y_0, z_0) punto estremo

Per il moltiplicatore di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c.

$x_0^2 - y_0 + 2z_0^2 = 0$, $y_0 + z_0 - 1 = 0$, $2x_0 = \lambda 2x_0$, $2y_0 = -\lambda + \mu$, $2z_0 = \lambda 4 z_0 + \mu$.

caso $x_0 = 0$. $\Rightarrow y_0 = 2z_0^2 \Rightarrow 2z_0^2 + z_0 - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = -1, \frac{1}{2} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (0, 2, -1)$
$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

caso $\lambda = 1$. $\left.\begin{matrix} 2y_0 = -1 + \mu \\ 2z_0 = 4z_0 + \mu \end{matrix}\right] \Rightarrow 2y_0 + 2z_0 = -1$, impossibile.

$f(0, 2, -1) = 5$, $f(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

$h(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = -z + 1$
$g(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y + 2z^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + z - 1 + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(z + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{8}$

Γ è compatto, e f vincolato a Γ ha il massimo e il minimo.

$\nabla g(x,y,z) = (2x, -1, 4z)$, $\nabla h(x,y,z) = (0, 1, 1)$

(x_0, y_0, z_0) è singolare se e solo se è $(0, y, -\frac{1}{4})$. $y = \frac{5}{4}$. Non è su Γ!

- $f(x,y,z) = xy + z$, $g(x,y,z) = x + y - 3z$, $h(x,y,z) = 4x + y + z - 2$.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto di minimo/massimo locale vincolato a Γ. Esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c.

$x_0 + y_0 - 3z_0 = 0$, $4x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0$, $y_0 = \lambda + 4\mu$, $x_0 = \lambda + \mu$, $1 = -3\lambda + \mu$.

$x_0 - y_0 = -3\mu$, $3x_0 + 1 = 4\mu$. $\Rightarrow 13x_0 - 4y_0 + 3 = 0$.

$13x_0 + 4y_0 = 6 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{26}$, $y_0 = \frac{9}{8}$, $z_0 = \frac{43}{104}$

$\nabla g(x,y,z) = (1, 1, -3)$

$\nabla h(x,y,z) = (4, 1, 1)$.

un vettore ortogonale a tutti e due è $(4, -13, -3)$.

Γ è parametrizzata da $(x_0, y_0, z_0) + t(4, -13, -3) = \gamma(t)$..

$f \circ \gamma(t) = 4t \cdot (-13)t + \cdots$. Ammette un solo massimo.

- $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z^2$, $g(x,y,z) = 3x - 5y + z - 7$, $h(x,y,z) = x + 2y - 3z - 1$.

AM2 Lezione 26 Curve rettificabili, integrale (Epstein 2, sez 2.3) 2025.11.18.

Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, Δ una suddivisione di $[a,b]$, ossia, $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ t.c. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$.

Vogliamo capire la lunghezza di γ. Per Δ, possiamo approssimare γ con i segmenti $[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$. La lunghezza totale dei segmenti è $L(\gamma, \Delta) = \sum_{j=1}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$.

<u>Def</u> se $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, \Delta) : \Delta \text{ è una suddivisione di } [a,b]\} < \infty$, allora γ si dice rettificabile e $L(\gamma)$ la lunghezza di γ.

<u>Teo</u> Se γ è di C^1 (ossia se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono differenziabili e $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ sono continue su $[a,b]$), allora $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$.

dim) Si nota che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma'_k(t)^2}$ è continua. Inoltre, per il Teorema del valor intermedio esistono $\tau_{j,k} \in (t_{j-1}, t_j)$ t.c. $\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}) = \gamma'_k(\tau_{j,k})(t_j - t_{j-1})$.

$$L(\gamma, \Delta) = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))^2} = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma'_k(\tau_{j,k})^2} \cdot |t_j - t_{j-1}|$$

Per la continuità uniforme di γ'_k, per $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c. $|\gamma'_k(\tau) - \gamma'_k(\tau')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)Mn}$, dove $M = \sup_{\tau, k} |\gamma'_k(\tau)|$, per $|\tau - \tau'| < \delta$.

Se Δ è una suddivisione con $|t_j - t_{j-1}| < \delta$, allora

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sup_{\tau \in [t_{j-1}, t_j]} \gamma'_k(\tau)^2} \cdot |t_j - t_{j-1}|}_{S(\Delta)} > L(\gamma, \Delta) > \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \inf_{\tau \in [t_{j-1}, t_j]} \gamma'_k(\tau)^2}\, |t_j - t_{j-1}|}_{s(\Delta)},$$

somma superiore, somma inferiore per funzione $t \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma'_k(t)}$

E la differenza di due lati sono minore di ε. Allora, per δ piccolo, le differenze tra $L(\gamma, \Delta)$ e $S(\Delta)$, $s(\Delta)$ sono piccole. Al limite, $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma'_k(t)}$.

<u>Esempio</u> Sia $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, <u>una parametrizzazione</u> del cerchio di raggio a. $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$. $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a$.

$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a$.

<u>Cambiamenti di parametro</u>

<u>Def</u> Due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione biettiva $\varphi : \tilde{I} \to I$ di $C^1(\tilde{I})$ t.c. $\varphi'(t) \neq 0$ e $\tilde{\gamma}(t) = \gamma \circ \varphi(t)$.

Se $\varphi'(t) \gtrless 0$ per $t \in \tilde{I}$, allora si dice che γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso verso/verso opposto.

L'immagine di γ si dice il sostegno. Se γ e $\tilde{\gamma}$ sono equivalenti, allora i sostegni sono identici.

Teo Siano $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ due curve equivalenti tramite φ. Allora $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

dim) $L(\tilde{\gamma}) = \int_\alpha^\beta \| \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \| dt = \int_\alpha^\beta \| \gamma'(\varphi(t)) \| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt$. per il cambiamento di variabile

$I = [a,b]$, $\tilde{I} = [\alpha, \beta]$ $\quad f(s) = \| \gamma'(s) \|$, se $\varphi'(t) > 0$. $a \leftrightarrow b$ se $\varphi'(t) < 0$.

Si nota che $\frac{d}{dt} \gamma(\varphi(t)) = \left(\frac{d}{dt} \gamma_1(\varphi(t)), \dots \frac{d}{dt} \gamma_n(\varphi(t))\right) = (\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t), \dots, \gamma_n'(\varphi(t))\varphi'(t))$.

Esempio. $\gamma: I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. $\quad \varphi(t) = \cos t \quad \gamma'(t) = (1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}})$

$\tilde{\gamma}: \tilde{I} = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$. $\quad \tilde{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arccos t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = \frac{\pi}{3}$.

Integrali curvilinei di funzione

Immaginiamo il sostegno di γ come un filo rigido di densità che dipende dal punto. $f(\gamma(t))$. La massa della parte infinitesimale dt è $f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$

la massa totale è $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$.

Def Siano $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, $f: \gamma(I) \to \mathbb{R}$. t.c. $f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|$ è integrabile.

Si definisce $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$ e si dice integrale curvilineo di f rispetto a

Esempio $\gamma(t) = (3t, 4t-1, t+5)$, $I = [0,1]$. $f(x,y,z) = 3x - y + z$.

$\int_\gamma f ds = \int_0^1 (3 \cdot 3t - (4t-1) + t + 5) \cdot \sqrt{3^2+4^2+1} \, dt = 9\sqrt{26}$.

$\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se esistono $a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b$, $I = [a,b]$,

t.c. γ è C^1 su ogni (t_{j-1}, t_j). In questo caso, si definisce

$\int_\gamma f ds = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$.

Teo Siano $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ due curve di C^1 (a tratti), equivalenti, e supponiamo che $\int_\gamma f ds$ esiste. Allora $\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_\gamma f ds$.

dim) analogo.

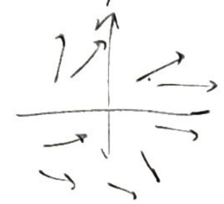
Esercizi

- $\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $f(x,y,z) = xyz$, $I = [0,1]$ $\int_\gamma f ds = -\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}$.
- $\gamma(t) = (t, \frac{t^3}{2})$, $I = [-\frac{e - \frac{1}{e}}{2}, \frac{e - \frac{1}{e}}{2}]$, $f(x,y,z) = 1$.

$x = \sinh t$.

AM2 Lezione 27 Campi vettoriali 2025.11.20

Ricordiamoci che un campo vettoriale è una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$, $x \in \Omega$. Ossia, per ogni punto $x \in \Omega$, c'è un vettore $\mathbb{F}(x)$.
Per una funzione f, $\nabla f(x) = (D_1 f(x), \dots D_n f(x))$ è un campo vettoriale.
Come esempi fisici ci sono campi magnetici, campi elettrici, campi gravitazionali, velocità di un fluido...



Integrale di linea (integrale curvilineo) di campo vettoriale

In un campo gravitazionale $\mathbb{F}(x)$, il lavoro che un materiale subisce per fare uno spostamento piccolo, scritto dx, è $\mathbb{F}(x) \cdot dx$.
Per calcolare il lavoro lungo una curva (linea), bisogna "sommare" $\mathbb{F}(x) \cdot dx$.

Def. Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di $C^1([a,b])$, $\mathbb{F} : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Si definisce l'integrale di linea (curvilineo) di $\mathbb{F}$ lungo γ per

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx := \int_a^b \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

(si chiama anche l'integrale di forma differenziale, con $\gamma'(t) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \dots \frac{d\gamma_n}{dt}(t)\right)$, "$\gamma'(t)dt = (d\gamma_1, \dots d\gamma_n)$" e "$\mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \mathbb{F}(x) \cdot dx$".)

Esempi. • $\gamma(t) = (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}(x,y) = (x^2 y, x y^2)$. $I = [0,1]$.

$$\int_\gamma \mathbb{F} dx = \int_0^1 \mathbb{F}(t^2, t^3) \cdot (2t, 3t^2)\, dt = \int_0^1 (t^7, t^8) \cdot (2t, 3t^2)\, dt = \int_0^1 (2t^8 + 3t^{10})\, dt$$
$$= \left[\frac{2}{9} t^9 + \frac{3}{11} t^{11}\right]_0^1 = \frac{49}{99}.$$

• $\gamma(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t, z_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, $z_0, \rho \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{B}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) \in \mathbb{R}^3$, definito se $x^2+y^2 \neq 0$. (campo magnetico della corrente elettrica in $x^2+y^2=0$.)
$\gamma'(t) = (-\rho \sin t, \rho \cos t, 0)$. $\mathbb{F}(\gamma(t)) = \left(\frac{-\rho \sin t}{\rho^2}, \frac{\rho \cos t}{\rho^2}, z_0\right) = \left(-\frac{\sin t}{\rho}, \frac{\cos t}{\rho}, z_0\right)$.

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi.$$

Oss (I) Linearità se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_\gamma \lambda \mathbb{F} \cdot dx = \lambda \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx$.
Per due campi vettoriali, $\int_\gamma (\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2)\, dx = \int_\gamma \mathbb{F}_1 \cdot dx + \int_\gamma \mathbb{F}_2 \cdot dx$.
(II) Additività. Se γ è una curva di classe C^1 a tratti, $[a,b]$, $a = t_0 < \dots < t_N = b$, allora è naturale definire $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx := \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot dx + \dots + \int_{\gamma_N} \mathbb{F} \cdot dx$, dove γ_j è la restrizione di γ a $[t_{j-1}, t_j]$.

Teo. Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ equivalenti, $\mathbb{F}$: campo vettoriale su $\gamma(I) = \tilde{\gamma}(\tilde{I})$.

(i) Se γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso verso, $\int_\gamma \mathbb{F} dx = \int_{\tilde{\gamma}} \mathbb{F} \cdot dx$. $I = [a, b]$, $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$

(ii) i versi opposti, $-\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}} \mathbb{F} \cdot dx$.

dim) Supponiamo che $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$, $\varphi'(t) > 0$. (stesso verso). Allora $\varphi(a) = \tilde{a}$, $\varphi(b) = \tilde{b}$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathbb{F} \cdot dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \mathbb{F}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\, dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \mathbb{F}(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \mathbb{F}(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \quad \left(\int_b^a \cdots \text{ se opposti}\right).$$

Esercizi

Calcolare gli integrali di linea

$\mathbb{F}(x, y) = (2x - y, x + y)$, $\gamma(t) = (2t - 1, 3t - 4)$, $I = [0, 1]$.

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^1 \mathbb{F}(2t-1, 3t-4) \cdot (2, 3)\, dt = \int_0^1 \left((2(2t-1) - (3t-4)) \cdot 2 + ((2t-1) + (3t-4)) \cdot 3 \right) dt$$

$$= \int_0^1 (17t - 11)\, dt = \left[\frac{17}{2} t^2 - 11t \right]_0^1 = -\frac{5}{2}.$$

$\mathbb{F}(x, y) = (3x^2 + y, -xy)$, $\gamma(t)$ il segmento da $(0,1)$ a $(2,0)$.

$\gamma(t) = (2t, 1 - t)$. $t \in [0, 1]$

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^1 \mathbb{F}(2t, 1-t) \cdot (2, -1)\, dt = \int_0^1 \left((3 \cdot (2t)^2 + (1 - t)) \cdot 2 + (-2t(1-t)) \cdot (-1) \right) dt$$

$$= \int_0^1 (22t^2 + 2)\, dt = \left[\frac{22}{3} t^3 + 2t \right]_0^1 = \frac{28}{3}.$$

$\mathbb{F}(x, y) = (2y, -2x)$, γ la circonferenza di raggio 2 e centro $(0,0)$, antioraria.

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$. (non dipende dal punto di partenza)

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(2\cos t, 2\sin t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (4\sin t, -4\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8)\, dt = -16\pi.$$

$\mathbb{F}(x, y, z) = (4, x, -2)$, γ il segmento da $(1, 3, 2)$ a $(2, 1, 1)$.

$\gamma(t) = (t + 1, 3 - 2t, 2 - t)$ $t \in [0, 1]$

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^1 \mathbb{F}(t+1, 3-2t, 2-t) \cdot (1, -2, -1)\, dt = \int_0^1 (4, t+1, -2) \cdot (1, -2, -1)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-2t + 4)\, dt = \left[-t^2 + 4t \right]_0^1 = 3.$$

AM2 Lezione 28 Campi vettoriali conservativi. 2025.11.24

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso. Per ogni coppia $x, y \in \Omega$, c'è $\gamma : [a,b]$ C^1 a tratti t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. (lineare a tratti).

Def. Un campo vettoriale $\mathbb{F}$ si dice di (classe) $C^1(\Omega)$ se i componenti $F_1, \dots, F_n$ sono di C^1.
$\mathbb{F}$, di $C^1(\Omega)$, si dice conservativo se esiste $U : \Omega \to \mathbb{R}$, $C^1(\Omega)$, t.c. $\mathbb{F}(x) = \nabla U(x)$.
(la "forma differenziale" $\mathbb{F} \cdot dx$ si dice esatto in tal caso e U si dice la funzione potenziale o primitiva di $\mathbb{F}$.

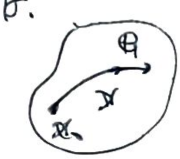
Oss. La definizione dipende da Ω. Se $\mathbb{F}$ è un campo di forza, $-U$ è nota come l'energia potenziale.

Teo Siano $\gamma : [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti, $\mathbb{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ conservativo, U t.c. $\mathbb{F}(x) = \nabla U(x)$.
Allora $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$.
dim) Sia γ C^1 su $[a,b]$. Allora, per la regola di catena, $\frac{d}{dt} U(\gamma(t)) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$
$= \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Per il teorema fondamentale del calcolo,
$U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t))\, dt = \int_a^b \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \mathbb{F}\, dx$.
Se γ è di C^1 a tratti, $[a,b] = [t_0, t_1] \cup \cdots \cup [t_{N-1}, t_N]$, γ_j,
si ha $U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(\gamma(t_N)) - U(\gamma(t_{N-1})) + U(\gamma(t_{N-1})) - \cdots - U(\gamma(t_0)) = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \mathbb{F} dx$
$= \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx$.
Def γ si dice chiuso se $\gamma(a) = \gamma(b)$. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x^2+y^2=0\}$.
(Non)esempio $\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$. $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = 2\pi$ per $\gamma(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t, z_0)$
Se ci fosse U t.c. $\mathbb{F} = \nabla U$, varrebbe $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (\rho, 0, z_0)$
$2\pi = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = U(\rho, 0, z_0) - U(\rho, 0, z_0) = 0$, contraddizione.

Oss. Se U, U' sono funzioni t.c. $\nabla U = \nabla U' = \mathbb{F}$, allora $U - U'$ è costante. $\nabla(U - U') = 0$.

Teo. Siano Ω, $\mathbb{F}$ come prima. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.
(i) $\mathbb{F}$ è conservativo (ii) se $\gamma, \tilde\gamma$ sono t.c. $\gamma(a) = \tilde\gamma(a)$, $\gamma(b) = \tilde\gamma(b)$, allora $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_{\tilde\gamma} \mathbb{F} \cdot dx$
(iii) Per γ chiuso, $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = 0$.
dim) (i) $\Rightarrow$ (iii). Segue dal teorema precedente.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Siano $\gamma, \tilde\gamma$ come in (ii). Allora $\eta : [a, 2b-a]$ $\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a,b] \\ \tilde\gamma(2b-t) & t \in [b, 2b-a] \end{cases}$
Allora η è chiuso e $0 = \int_\eta \mathbb{F} \cdot dx = \int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot dx - \int_{\tilde\gamma} \mathbb{F} \cdot dx = 0$, notando che
$\varphi(t) = 2b - t$ implementa l'equivalenza tra $\eta|_{[b, 2b-a]}$ e $\tilde\gamma$ con versi opposti.

(ii) Sia $x_0 \in \Omega$. Per $x \in \Omega$, prendiamo $\gamma : [a,b] \to \Omega$ t.c. $x_0 = \gamma(a)$, $x = \gamma(b)$.
Definiamo $U(x) = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx$. In realtà, U non dipende dalla scelta di γ.
Infatti $\int_{\tilde\gamma} \mathbb{F}\, dx = \int_\gamma \mathbb{F}\, dx$ per l'ipotesi.



Per calcolare $\nabla U(x)$, per $x + h e_k$, prendiamo $\gamma_h = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a,b] \\ x + (t-b) e_k & t \in [b, b+h] \end{cases}$.

Allora $D_k U(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{U(x+he_k) - U(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\int_{\gamma_h} \mathbb{F}\cdot dx - \int_\gamma \mathbb{F}\cdot dx\right) = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \int_b^{b+h} \mathbb{F}(\gamma_h(t)) \cdot e_k\, dt$
$= F_k(\gamma_h(b))$ per la continuità di F_k

Esempi

- $\mathbb{F}(x,y) = (3x^2 y + xy^2 + 2,\ x^3 + x^2 y - 1)$.
  $\mathbb{F}(x,y)$ è conservativo. Infatti, si può prendere $U(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2x - y$.
  Per trovare U, si prova. $\int (3x^2 y + xy^2 + 2)\, dx = x^3 y + \frac12 x^2 y^2 + 2x + C(y)$.
  $\int (x^3 + x^2 y - 1)\, dy = x^3 y + \frac12 x^2 y^2 - y + C(x)$.
  Possono essere soddisfatte con $C(y) = -y$, $C(x) = 2x$.

- $\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $\Omega = \{(x,y,z) : x > 0\}$.
  Prendiamo $U(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Allora vale $\nabla U(x,y,z) = \left(\frac{1}{(\frac{y}{x})^2+1} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \frac{1}{(\frac{y}{x})^2+1} \cdot \frac{1}{x}, 0\right)$
  $= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$. Dunque $\mathbb{F}(x,y,z)$ è conservativo in Ω.
  D'altra parte, sappiamo che $\mathbb{F}$ non è conservativo in $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \neq 0\} = \Omega'$
  Si nota che, mentre $U(x,y)$ è definita su Ω, non c'è un modo continuo per estendere $U(x,y)$ in Ω'.

- Sia $\alpha \neq 2$. $\mathbb{F}(x) = \|x\|^{-\alpha} \cdot x$ è un campo vettoriale conservativo
  Infatti, $U(x) = \frac{1}{2-\alpha} \|x\|^{2-\alpha}$, allora
  $$D_k U(x) = D_k \left(\frac{1}{2-\alpha} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\right)^{2-\alpha}\right) = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\right)^{2-\alpha-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \cdot 2x_k = \|x\|^{-\alpha} x_k$$
  Per "$\alpha = 2$", si considera $U(x) = \log \|x\|$.
  $$D_k U(x) = \frac{1}{\|x\|} \frac{x_k}{\|x\|} = \|x\|^{-2} x_k.$$

AM2 Lezione 29 Rotore 2025.11.25.

Sia $\mathbb{F}$ un campo vettoriale su $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ derivabile. Si definisce, per $\mathbb{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{F}(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Simbolicamente, facendo finta che $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ fosse un vettore, si può scrivere $\mathrm{rot}\,\mathbb{F}(x) = \nabla \times \mathbb{F}(x)$ $(= \mathrm{curl}\,\mathbb{F})$.
(si ricorda che $u \times w = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$.).

Esempio. $\mathbb{F}(x,y,z) = (xye^z, y^2 e^z, xyz)$.
$\mathrm{rot}\,\mathbb{F}(x,y,z) = (xz - y^2 e^z, xye^z - yz, -ye^z)$.

In $\mathbb{R}^2$, un campo vettoriale $\mathbb{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ si può considerare un campo vettoriale $\mathbb{F}(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$ in $\mathbb{R}^3$. Siccome F_1, F_2 non dipendono da z,
$\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = \left(0-0, 0-0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right)$.
siccome i primi componenti sono zeri, a volte $\mathrm{rot}\,\mathbb{F}$ per $\mathbb{F}$ su $\mathbb{R}^2$ si identifica con la funzione $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$.

<u>Def</u> $\mathbb{F}$ (sia su $\mathbb{R}^2$ che su $\mathbb{R}^3$) si dice irrotazionale se $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 0$.
Per definizione, $\mathrm{rot}\,\mathbb{F} = 0 \iff \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ per tutti $j,k = 1,2,3$ (distinti).
Per $\mathbb{F}$ un campo vettoriale su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $\mathbb{F}$ è irrotazionale se $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ per tutti $j,k = 1,\dots,n$. (e la forma differenziale $\mathbb{F}\cdot dx$ si dice chiusa)

<u>Teo</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{F}$ un campo vettoriale su Ω di $C^1(\Omega)$. Se $\mathbb{F}$ è conservativo, allora $\mathbb{F}$ è irrotazionale.
dim) Sia U una funzione t.c. $\mathbb{F}(x) = \nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial U}{\partial x_n}(x)\right)$.
Siccome $\mathbb{F}$ è di $C^1(\Omega)$, U è di $C^2(\Omega)$. Segue che, $\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ per il teorema di Schwarz.
Per la trasposizione, se $\mathbb{F}$ non è irrotazionale, allora $\mathbb{F}$ non può essere conservativo.

<u>Esempi</u> • $\mathbb{F}(x,y) = (xy, x)$. $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F_x}{\partial y} = x$. $\mathbb{F}$ non è irrotazionale, dunque non conservativo
• $\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \neq 0\}$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sappiamo che $\mathbb{F}$ non è conservativo, ma è irrotazionale.

<u>Condizione sufficiente per essere campo conservativo.</u>

<u>Teo</u> Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e convesso, $\mathbb{F}$ un campo irrotazionale. Allora $\mathbb{F}$ è conservativo in Ω.

dim). Prendiamo un punto $x_0 \in \Omega$. Per qualsiasi $x \in \Omega$, definiamo $\gamma : [0,1] \to \Omega$,

$\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx$, $U(x) = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_0^1 \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot (x - x_0)\,dt$

Per dimostrare, serve

<u>Lemma</u> Sia $f : [a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$, $f(x,t)$ continua, $\frac{\partial f}{\partial t}$ continua su $[a_1,b_1] \times (a_2, b_2)$.

Allora, $g(t) = \int_{a_1}^{a_2} f(x,t)\,dx$, $\frac{dg}{dt}(t) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$. (da dimostrare giovedì).

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot (x - x_0)\right)dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot t(x_j - x_{0,j}) + F_k(\gamma(t))\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\gamma(t))\, t(x_j - x_0) + F_k(\gamma(t))\right)dt = \int_0^1 \left(\nabla F_k(\gamma(t))\, t\gamma'(t) + F_k(\gamma(t))\right)dt$$

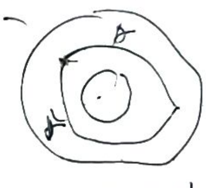
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t \cdot F_k(\gamma(t))\right)dt = \left[t F_k(\gamma(t))\right]_0^1 = F_k(\gamma(1)) = F_k(x).$$

Il teorema vale anche per regioni "semplicemente connesse", ossia, quando ci sono due curve γ, $\tilde{\gamma}$ t.c. $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$, allora $\tilde{\gamma}$ si può "deformare continuamente" a γ.

Regioni convesse sono semplicemente connesse, mentre una "ciambella" non lo è.

Una regione semplicemente connessa "non ha buchi", in un certo senso.

Semplicemente connesso



non semplicemente connesso.

<u>Esercizi</u> Stabilire se $\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{3y^2}{9y^4 + x^2}, 2 - \frac{6xy}{9y^4 + x^2}\right)$ è irrotazionale e conservativo. Nella regione $\{(x,y) : x > 0\}$

$U(x,y) = \arctan \frac{x}{3y^2} + 2y$.

AM2 Lezione 30 2025.11.28

Teo (Heine-Cantor) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continuo.
Allora f è uniformemente continua su Ω, ossia, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c. per $x, y \in \Omega$ t.c. $\|x - y\| < \delta$, vale $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
dim) Supponiamo, per assurdo, che esiste $\varepsilon > 0$ t.c. per tutti $\delta > 0$, esistono $x, y \in \Omega$ t.c. $\|x - y\| < \delta$ e vale $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Si fissa un tale $\varepsilon > 0$. Per tutti $\delta = \frac{1}{k}$, esistono $x_k, y_k \in \Omega$ t.c. $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$.
Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione x_{k_j} convergente a a per $j \to \infty$.
Siccome $\|x_{k_j} - y_{k_j}\| < \frac{1}{k_j} \to 0$, $y_{k_j} \to a$. Allora $\lim_{j \to \infty} |f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| = f(a) - f(a) = 0$ per la continuità di f, contraddizione.

Lemma. Sia J un intervallo, $f \in C([a,b] \times J)$, $g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$
Allora g è continua. Ossia, per $t_0 \in J$, $\lim_{t \to t_0} \int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f(x,t_0)\,dx = g(t_0)$.
dim) Per il teorema di Heine-Cantor, per $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(x,t) - f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ se $|t - t_0| < \delta$. Allora $|g(t) - g(t_0)| = \left|\int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0))\,dx\right|$
$\leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$. Significa $\lim_{t \to t_0} g(t) = g(t_0)$.

Lemma Sia $f \in C([a_1,b_1] \times (a_2,b_2))$, $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a_1,b_1] \times (a_2,b_2))$. Allora
$\frac{d}{dt} g(t_0) = \frac{d}{dt}\int_{a_1}^{b_1} f(x,t_0)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)\,dx$.
dim) Si considera $h(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} & \text{se } t \neq t_0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) & \text{se } t = t_0 \end{cases}$.
h è continua. Infatti, la continuità in (x,t), $t \neq t_0$ è chiara.
Per tutti $(x,t) \in [a_1,b_1] \times (a_2,b_2)$, esiste τ t.c. $h(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t} f(x,\tau)$ per il teorema del valore medio, e τ si trova tra t e t_0.
Allora $\lim_{(x,t) \to (x_0,t_0)} h(x,\tau) = \lim_{(x,t) \to (x_0,t_0)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,\tau) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0)$ per la continuità.
Si applica il lemma precedente a h e
$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(g(t) - g(t_0)) = \lim_{t \to t_0} \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx$;
(così è completo anche la dimostrazione di martedì).

Osservazioni
Si possono considerare $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Si possono definire continuità di $\mathbf{f}$, derivate parziali di $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$.

Se tutti i componenti $f_j(x)$ sono differenziabili, si definisce la matrice Jacobiana $J\mathbf{f}(x) = D\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

In questo caso, vale la approssimazione lineare:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0) + J\mathbf{f}(x)\cdot(x - x_0) + r(x), \quad \|r(x)\| = o(\|x - x_0\|). \text{ per } x \to x_0.$$

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}: A \to B$, $\mathbf{f}: B \to \mathbb{R}^k$ differenziabili. Allora vale la regola di catena $D(\mathbf{g}\circ \mathbf{f})(x) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(x))\cdot D\mathbf{f}(x)$.

Per dimostrarla, basta considerare $(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_j$ e applicare la regola di catena per $f(\gamma(t))$.

Esercizi

- Calcolare $g'(0)$

$$g(t) = \int_1^2 \log(x + 3t)\,dx \qquad g'(t) = \int_1^2 \frac{3}{x+3t}\,dx.\ g'(0) = \int_1^2 \frac{3}{x}\,dx = 3\log 2.$$

$$g(t) = \int_1^3 \frac{1}{x^2+t}\,dx \qquad g'(t) = \int_1^3 -\frac{1}{(x^2+t)^2}\,dt.\ g'(0) = -\int_1^3 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{27}\right) = -\frac{26}{81}$$

$f(x,y) = xy$, $\quad \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ .. "coordinate polare".

Calcolare $\frac{\partial}{\partial r} f\circ\Phi = \frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\theta\sin\theta) = 2r\cos\theta\sin\theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f\circ\Phi = \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\cos\theta\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$Df(x,y) = \nabla f(x,y) = (y, x),\quad D\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

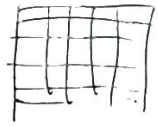
$$\underbrace{D(f\circ\Phi)(r,\theta)}_{\| \atop Df(\Phi(r,\theta))\cdot D\Phi(r,\theta)} = (r\sin\theta \;\; r\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = (2r\cos\theta\sin\theta.\;\; r^2(\cos^2\theta - \sin\theta))$$

AM2 Lezione 31 Integrali multipli (capitolo 4) 2025.12.01

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. L'integrale $\int_a^b f(x)dx$ determina l'area della regione tra il grafico di f e l'asse x (se $f(x) \geq 0$).

Analogamente, se $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è continua, bisogna definire l'integrale di f che permette di calcolare il volume della regione $\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.
e generalizzare a domini generici.

<u>Def</u> $Q = [a,b] \times [c,d]$.
Siano $\mathcal{D}_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$, una partizione di $[a,b]$, $a = x_0$, $b = x_n$
$\mathcal{D}_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$ $[c,d]$. $c = y_0$, $d = y_m$



$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_j, y_k)\}$ si dice partizione di $[a,b] \times [c,d]$. $Q_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$
Se $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}}$ sono due partizioni, $\tilde{\mathcal{D}}$ si dice più fine di $\mathcal{D}$.

<u>Def</u> Siano $f: Q \to \mathbb{R}$ limitata, $\mathcal{D}$ una partizione di Q.
somma superiore $S(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sup_{Q_{jk}} f\, |Q_{jk}|$, $|Q_{jk}| = (x_j - x_{j-1}) \times (y_k - y_{k-1})$
somma inferiore $s(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \inf_{Q_{jk}} f\, |Q_{jk}|$.
f si dice integrabile (secondo Riemann) se $\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}) = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D})$, dove $\inf_{\mathcal{D}}$ ($\sup_{\mathcal{D}}$) significa l'inf su tutte le possibili partizioni, e il valore si scrive
$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$, detto l'integrale (doppio) di f in Q.

Se f è integrabile in Q, $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$ viene approssimato dalle somme dei volumi di cuboidi.
(Ci sono funzioni non integrabili, per esempio, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \text{ e } y \text{ sono razionali} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

<u>Teo</u> Se f è continua in $Q = [a,b] \times [c,d]$.
<u>dim</u>). Siccome Q è compatto, per il teorema di Heine-Cantor, f è uniformemente continua.
Sia $\varepsilon > 0$. Esiste δ t.c. se $\sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2} < \delta$, allora $|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$.
Sia $\mathcal{D}$ una partizione t.c. $\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$. Segue che
$\sup_{Q_{jk}} f - \inf_{Q_{jk}} f \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$ e dunque $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot Q_{jk} = \varepsilon$.
Allora $\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}) - \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) < \varepsilon$ per ε arbitrario.
Significa che sono uguali.

<u>Teo</u> Siano f, g integrabili su $Q = [a,b] \times [c,d]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(i) $f+g$ è integrabile in Q e $\iint_Q (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy + \iint_Q g(x,y)\,dx\,dy$.
$\iint_Q \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$.

(ii) Se $f(x,y) \leq g(x,y)$, allora $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_Q g(x,y)\,dx\,dy$.

(iii) $\left| \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_Q |f(x,y)|\,dx\,dy$

dim) analogo al caso di dimensione 1.

<u>Teo</u> Siano $Q = [a,b] \times [c,d]$ e f continua su Q.

Allora $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$.

dim) Sappiamo che $g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ è continua.

Sia $\varepsilon > 0$. Per la continuità uniforme di f su Q, prendiamo δ come prima, anche $\mathcal{D}$.

$$\text{Allora } S(g, \mathcal{D}_2) = \sum_{k=1}^{m} \sup_{[y_{k-1}, y_k]} g \, (y_k - y_{k-1}) \qquad = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sup_{y \in [y_{k-1}, y_k]} (y_k - y_{k-1}) \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{y \in [y_{k-1}, y_k]} (y_k - y_{k-1}) \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x,y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |Q_{jk}| \sup_{(x,y) \in Q_{jk}} f(x,y) = S(f, \mathcal{D}).$$

Analogamente, $s(f, \mathcal{D}) \leq s(g, \mathcal{D}_2) \leq S(g, \mathcal{D}_2) \leq S(f, \mathcal{D})$.

Ma $S(f,\mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$. dunque $\underbrace{\sup_{\mathcal{D}} s(f,\mathcal{D})}_{\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy} = \underbrace{\sup_{\mathcal{D}_2} s(g, \mathcal{D}_2)}_{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy} = \inf_{\mathcal{D}_2} S(g, \mathcal{D}_2) = \inf_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D})$

<u>Esempi/esercizi</u>

- $Q = [0,2] \times [1,3]$

$$\iint_Q y(1+xy)\,dx = \int_1^3 \left(\int_0^2 (y + y^2 x)\,dx \right) dy = \int_1^3 \left[yx + \frac{y^2}{2} x^2 \right]_0^2 dy$$

$$= \int_1^3 (2y + 2y^2)\,dy = \left[y^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_1^3 = (9 + 18) - \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{76}{3}.$$

- $Q = [1,2] \times [1,3]$ $\iint_Q x^3 e^{yx^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^3 x^3 e^{yx^2}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[x e^{yx^2} \right]_1^3 dx$

$$= \int_1^2 (x e^{3x^2} - x e^{x^2})\,dx = \left[\frac{1}{6} e^{3x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_1^2 = \left(\frac{1}{6} e^{12} - \frac{1}{2} e^4 \right) - \left(\frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{2} e \right).$$

- $Q = [0,1] \times [2,3]$ $\iint_Q \frac{x}{1+y}\,dx\,dy$

- $Q = [1,2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ $\iint_Q x \sin(xy)\,dx\,dy$.

AM2 Lezione 32 Domini normali

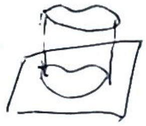
2025.12.02

Recupero dell'8 → il 5 alle 16:00
Regole esami.

Def Un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice
(i) dominio normale rispetto all'asse x se esistono $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$
(ii) — — y $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, $\Omega = \{(x,y) : y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$.

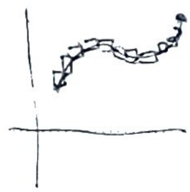
Insiemi normali sono chiusi.

Def Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $\Omega \subset Q = [a,b] \times [c,d]$.
$f : \Omega \to \mathbb{R}$. Definiamo $\tilde f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0. & \text{se } (x,y) \notin \Omega. \end{cases}$



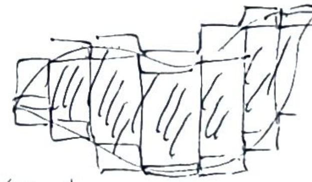
f si dice integrabile in Ω se $\tilde f$ è integrabile. $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_Q \tilde f(x,y)\,dxdy$.
Ω si dice misurabile se la funzione costante $f(x,y) = 1$ su Ω è integrabile.
$|\Omega| = \iint_\Omega 1\, dxdy$ si dice la misura (area) di Ω.

Lemma Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathrm{graf}\, g = \{(x,y) : x \in [a,b]\ y = g(x)\}$, g continua.
Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono rettangoli $[x_{j-1}, x_j] \times [y_j, \tilde y_j]$ con l'area totale $< \varepsilon$ e includono graf g.
dim). Siccome g è ~~un~~ uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ t.c., se $x, \tilde x \in [a,b]$ con $|x - \tilde x| < \delta$, allora $|g(x) - g(\tilde x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Sia $\mathcal{Q}$ una partizione di $[a,b]$ con $|x_j - x_{j-1}| < \delta$. Allora con $y_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g$, $\tilde y_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} g$, si ha l'affermazione.



Teo Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse x (o y), $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua.
Allora f è integrabile. Inoltre, se $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, allora
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x_1)}^{g(x_2)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$
(analogo se normale rispetto all'asse y. $\int_c^d \left(\int_{h(y_1)}^{h(y_2)} f(x,y)\,dx \right) dy$.)

dim) Sia Ω normale rispetto all'asse x e prendiamo g_1, g_2.
Sia $\varepsilon > 0$. Per il Lemma, esiste una partizione $\mathcal{Q}_1 = \{[x_{j-1}, x_j]\}$ t.c. graf g_1 e graf g_2 sono inclusi nei rettangoli con l'area totale $< \varepsilon / 4 \sup_\Omega |f|$. $|\sup f - \inf f| \le 2 \cdot \sup |f|$.



L'insieme che non è coperto da questi rettangoli, Ω_0, è un'unione de rettangoli.
Dunque sappiamo che $\iint_{\Omega_0} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_j}^{\tilde y_j} f(x,y)\,dy \right) dx$.
Per qualunque partizione $\mathcal{Q}$ più fine di $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$, dove $\mathcal{Q}_2$ è data da $\{y_j, \tilde y_j\}$.
Le contribuzioni a $S(\mathcal{Q})$, $s(\mathcal{Q})$ è minore di $\varepsilon/2$.
D'altra parte, $\left| \int_a^b \left(\int_{y_j}^{\tilde y_j} f(x,y)\,dy \right) dx - \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ analogamente.
Dunque, al limite in cui $\varepsilon \to 0$, si ha $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$.

Teo. Siano Ω limitato e misurabile, f, g integrabili e limitate in Ω. Allora.

(i) Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\iint_\Omega (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$.

(ii) Se $f(x,y) \le g(x,y)$, allora $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$.

(iii) $\left| \iint_\Omega f(x,y)\,dx \right| \le \iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy \le |\Omega| \cdot \sup_\Omega |f|$.

(iv) Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, disgiunti e misurabili, allora $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f\,dx\,dy$.
o $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

Esempi/esercizi. Calcolare l'integrale $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$.

- $\Omega = \{(x,y) : x \in [1,2],\ 0 \le y < x^2\}$
  $f(x,y) = \frac{3y^2}{x}$.

$$\iint_\Omega \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{x^2} \frac{3y^2}{x}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{y^3}{x} \right]_0^{x^2} dx = \int_1^2 x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \frac{21}{2}.$$

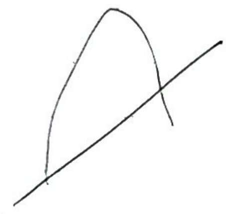
D'altra parte, si ha $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = [1,2] \times [0,1]$, $\Omega_2 = \{(x,y) : y \in [1,4], \sqrt{y} \le x \le 2\}$.

$$\iint_\Omega \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy, \quad \iint_{\Omega_1} \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{3y^2}{x}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[3y^2 \log x \right]_1^2 dy = 3\log 2 \int_0^1 y^2\,dy = 3\log 2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \log 2$$

$$\iint_{\Omega_2} \frac{3y^2}{x}\,dx\,dy = \int_1^4 \left[3y^2 \log x \right]_{\sqrt{y}}^2 dy = \int_1^4 (3y^2 \log 2 - 3y^2 \log\sqrt{y})\,dy = 63\log 2 - \left(64\log 2 - \frac{21}{3}\right).$$

Si nota $\int y^2 \log\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\int y^2 \log y\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\log y - \frac{y^3}{9} \right)$

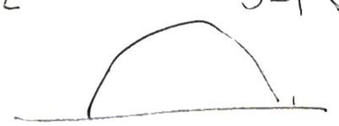


- $\Omega = \{(x,y) : x - 7 \le y \le 2 - 3x^2 - 5x\}$. $f(x,y) = 1$. (area).
  Due curve intersecano in $x = -3, 1$, risolvendo $x - 7 = 2 - 3x^2 - 5x$
  $(3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0)$.

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx = \int_{-3}^1 \left(\int_{x-7}^{2-3x^2-5x} 1\,dy \right) dx = \int_{-3}^1 [y]_{x-7}^{2-3x^2-5x} dx = \int_{-3}^1 (9 - 3x^2 - 6x)\,dx$$
$$= \left[9x - x^3 - 3x^2 \right]_{-3}^1 = 32$$

- $\Omega = \{(x,y) : x \in [-1,1],\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. $f(x,y) = 1$ (area del semidisco).

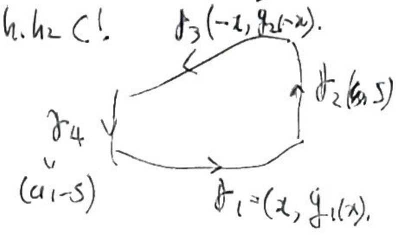
$$\iint_\Omega 1\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy \right) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,dt = \frac{\pi}{2}$$



$x = \sin t$, $\frac{dx}{dt} = \cos t$.
$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

AM2. Lezione 33 Teorema di Green, esercizi. 2025.12.04.

Teo Sia Ω un dominio normale sia rispetto all'asse x che y; (o un'unione di tali domini).
$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vettoriale $C^1(\Omega)$. g_1, g_2, h_1, h_2 C^1.
Allora vale $\iint_\Omega \mathrm{rot}\, F \,dxdy = \int_\gamma F \, d\vec{x}$, dove γ parametrizza il bordo di Ω in senso antiorario.



dim) Consideriamo prima $F_1(x,y) = (P(x,y), 0)$. Allora $\mathrm{rot} F = -\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}\, F(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b -P(x,g_2(x)) + P(x,g_1(x))\,dx.$$

$$\int_{\gamma_1} F\cdot ds = \int_a^b (P(x,g_1(x)),0)\cdot(1, g_1'(x))\,dx = \int_a^b P(x,g_1(x))\,dx.$$

$\int_{\gamma_2} F\cdot ds = \int_{c_2}^{d_2} (P(b,s),0)\cdot(0,1)\,dx = 0$. Analogamente, $\iint_{\gamma_3} F\cdot ds = \int_a^b -P(x,g_2(x))\,dx$

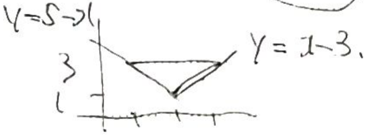
$\iint_{\gamma_4} F \,ds = 0$. Dunque vale la formula.

Se $F_2(x,y) = (0, Q(x,y))$, considerando Ω come normale rispetto all'asse y, si ha la formula.
Infine, $F = F_1 + F_2$, e si ottiene la formula per linearità delle formule.
Se Ω è unione di tali domini, basta scomporre e cancellare gli integrali di linea nelle direzioni opposte.

Esercizi

Calcolare l'integrale multiplo $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$

- Ω è il triangolo di vertici $(2,3), (6,3), (4,1)$.
  $f(x,y) = (2x-3)y$.



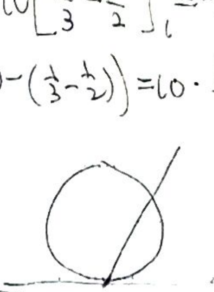
$$\Omega = \{(x,y) : y \in [1,3],\ 5-y \le x \le y+3\}.$$

$$\iint_\Omega (2x-3)y\,dx = \int_1^3\left(\int_{5-y}^{y+3} (2x-3)y\,dx\right)dy = \int_1^3 \left[y(x^2-3x)\right]_{5-y}^{y+3} dy$$

$$= \int_1^3 y\left(\left((y+3)^2 - 3(y+3)\right) - \left((5-y)^2 - 3(5-y)\right)\right)dy = \int_1^3 y(10y-10)\,dy = 10\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{140}{3}.$$

$$(y^2 + 6y + \cancel{9} - 3y - \cancel{9}) - (y^2 - 10y + 25 - 15 + 3y) \qquad 10\left(\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right) = 10 \cdot \frac{14}{3}$$

- $\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 2x,\ x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$
  $= \{(x,y) : y \in [0, \frac{8}{5}],\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{1-(y-1)^2}\}$



$$\iint_\Omega \frac{x \sin y}{y}\,dxdy = \int_0^{\frac{8}{5}} \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x\sin y}{y}\,dx\right)dy = \int_0^{\frac{8}{5}} \frac{\sin y}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy = \ldots$$

$$\int_0^{\frac{8}{5}} \frac{\sin y}{2y}\cdot\left(\left(1-(1-y)^2\right)-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = \int_0^{\frac{8}{5}} \frac{\sin y}{2y}\cdot\left(2y-\frac{5}{4}y^2\right)dy = \int_0^{\frac{8}{5}}\left(\sin y-\frac{5}{8}y\sin y\right)dy$$

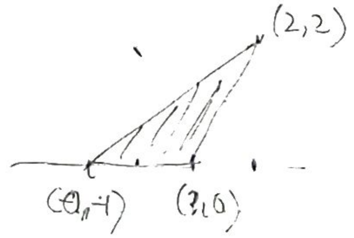
$$= \left[-\cos y+\frac{5}{8}(y\cos y-\sin y)\right]_0^{\frac{8}{5}} = 1-\frac{5}{8}\sin\frac{8}{5}.$$

$$\int y\sin y\,dy = -y\cos y+\sin y$$

Baricentro

Def. Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un insieme misurabile. Il baricentro di Ω è

$$\left(\frac{\iint_\Omega x\,dx\,dy}{\iint_\Omega dx\,dy},\ \frac{\iint_\Omega y\,dx\,dy}{\iint_\Omega dx\,dy}\right)$$



$y=\frac{2}{3}(x+1)$, $y=2x-2$.

Esempi $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le y\le 2,\ \frac{3}{2}y-1\le x\le \frac{1}{2}y+1\right\}$

$$\iint_\Omega 1\,dx\,dy = \int_0^2\int_{\frac{3}{2}y-1}^{\frac{1}{2}y+1} dx\,dy = \int_0^2(2-y)dy = \left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2.$$

$$\iint_\Omega x\,dx\,dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}y-1}^{\frac{1}{2}y+1}dy = \int_0^2(-y^2+4y)dy = \left[-\frac{y^3}{3}+y^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_0^2 y(2-y)dy = \left[y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

$\Omega=\left\{(x,y):\ x\in[-1,1],\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$

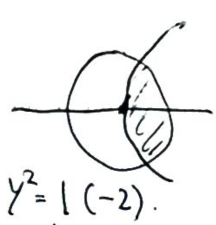
$$\iint_\Omega dx\,dy = \int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx = \int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\iint_\Omega x\,dx\,dy = \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1 = 0.$$

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_{-1}^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^1\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

un'altra rappresentazione. $\Omega=\left\{(x,y):\ y\in[0,1]:\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}$.



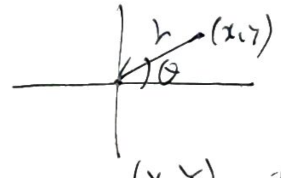
Esercizi $\iint xy^2\,dx\,dy$ $\quad\Omega=\left\{(x,y):\ y^2\le x,\ x^2+y^2\le 2\right\}$

$=\left\{(x,y):\ y\in[-1,1],\ y^2\le x\le\sqrt{2-y^2}\right\}$ $\quad y^4+y^2-2=0 \quad y^2=1\ (-2).$

$$\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^1 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}}dy = \int_{-1}^1\frac{y^2}{2}\left((2-y^2)-y^4\right)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^3-\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{34}{105}.$$

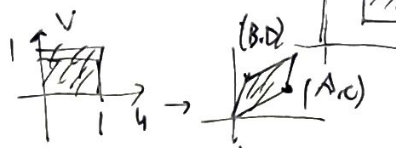
AM2 Lezione 34 Cambiamenti di variabile 2025.12.05.

Consideriamo le coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta = X(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = Y(r,\theta) \end{cases}$



Come si calcola $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$ nelle coordinate polari?

· Trasformazione lineare $\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases}$



Si nota che l'area del parallelogramma è $|(A,C)\times(B,D)| = AD - BC = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Teo (cambiamento di variabile). Siano $X(u,v)$, $Y(u,v)$ su un dominio Ω, $C^2(\Omega)$. Supponiamo che Ω sia un dominio normale e la frontiera è una curva C^1, e (X,Y) sia biettiva e l'immagine D sia normale e la frontiera di Ω viene mappata da (X,Y) a la frontiera di D. $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} X(u,v) \\ Y(u,v) \end{pmatrix}$ sia invertibile e Φ^{-1} sia $C^1(D)$. Sia f integrabile. Allora

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(X(u,v),Y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv,$$

dove $J(u,v)$ è la matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}$.

dim). ① Si dimostra la formula per il caso $f = 1$, D rettangolo.

Sia $\mathbb{F}(x,y) = (0,x)$. Per il teorema di Green, $\mathrm{rot}\,\mathbb{F}(x,y) = 1$. $\iint_D dxdy = \int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot dx$

D'altra parte, $J(u,v) = \frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\cdot\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial Y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial Y}{\partial u}\right)$

per il teorema di Schwarz.

Poniamo $\mathbb{G}(u,v) = \left(X(u,v)\cdot\frac{\partial Y}{\partial u},\ X(u,v)\cdot\frac{\partial Y}{\partial v}\right)$. Per il teorema di Green,

$$\iint_\Omega J(u,v)\,dudv = \iint_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbb{G}(u,v)\,dudv = \int_\beta \mathbb{G}\cdot du.$$

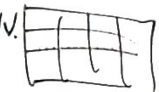
Per l'ipotesi, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} X(\beta(t)) \\ Y(\beta(t)) \end{pmatrix}$ si ha $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \nabla X(\beta(t))\cdot\beta'(t) \\ \nabla Y(\beta(t))\cdot\beta'(t) \end{pmatrix}$.

Dunque $\iint_D dxdy = \int_\gamma \mathbb{F}\,dx = \int_a^b (0, X(\beta(t)))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \mathbb{G}(\beta(t))\cdot\beta'(t) = \int_\beta \mathbb{G}\cdot du =$

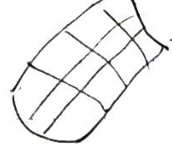
$= \iint_\Omega J(u,v)\,dudv$. Se β è senso orario, viene con $|J(u,v)|$.

②. Supponiamo che $f \neq 1$. $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ si può approssimare con la somma superiore e inferiore. Per una partizione $\mathcal{D}$ di D, poniamo $\bar{f}(x,y) = \sup_{Q_{jk}} f$ se $(x,y)\in Q_{jk}$.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \sup_{Q_{jk}} f\,|Q_{jk}| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \iint_{Q_{jk}} \bar{f}(x,y)\,dxdy = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \iint_{\Omega_{jk}} \bar{f}(X(u,v),Y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$$



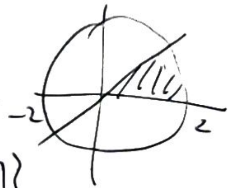
$$= \iint_\Omega \bar{f}(X(u,v),Y(u,v))\,dudv.$$



Analogo per $\underline{f} = \inf_{Q_{jk}} f$.

Siccome f è integrabile, per $\mathcal{D}$ fine, questi valori approssimano $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ e $\iint_\Omega f(X(u,v),Y(u,v))J(u,v)\,du\,dv$, dunque i limiti coincidono.

<u>Esempi</u> Calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y): 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 4\}$

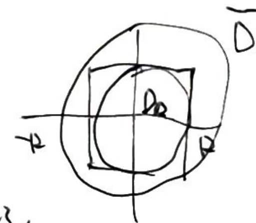


Sia $\begin{pmatrix}X(\theta,r)\\ Y(\theta,r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$. $\quad \Omega=\{(r,\theta): r\in[0,2],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\}$.

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_\Omega (r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^2 r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 4\cdot\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1,$$

dove $J(u,v)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$. $|J(u,v)|=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$.

· Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx$.



$$\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy=\iint_{Q_R}e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

Si ha $$\iint_{D_R}e^{-x^2-y^2}dx\,dy\le\iint_{Q_R}e^{-x^2-y^2}dx\,dy\le\iint_{\overline{D}_R}e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \pi(1-e^{-2R^2}) \to \pi.$$

$$\iint_{D_R}e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^R\int_0^{2\pi}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[-e^{-r^2}\right]_0^R=\pi(1-e^{-R^2})\to\pi$$

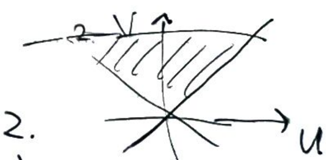
Dunque $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\right)^2=\pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ "integrale della Gaussiana"

<u>Esercizi</u>. Calcolare $\iint_D e^{(y-x)/(x+y)}dx\,dy$, $D=\{(x,y): 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 2\}$.

Con $X(u,v)=\frac{1}{2}(v-u)$, $\quad X(u,v)\ge 0 \iff v\ge u$

$Y(u,v)=\frac{1}{2}(v+u)$. $\quad Y(u,v)\ge 0\iff v+u\ge 0$

$X(u,v)+Y(u,v)\le 2\iff v\le 2$.



· $\Omega=\{(u,v): v\in[0,2],\ -v\le u\le v\}$. $J(u,v)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. $|J(u,v)|=\frac{1}{2}$.

$$\iint_D e^{(y-x)/(x+y)}dx\,dy=\iint_\Omega e^{u/v}du\,dv=\int_0^2\left(\int_{-v}^{v}e^{u/v}du\right)dv$$

$$=\int_0^2 v\left[e^{u/v}\right]_{-v}^{v}dv=\int_0^2 v(e-e^{-1})\,dv=(e-e^{-1})\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2=2(e-e^{-1}).$$

AM2 Lezione 35 Integrali tripli 2025.12.09

Per un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$, si può considerare integrale $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$
Per un cuboide / parallelepipedo $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.
Si considerano, per una partizione di Q la somma superiore e la somma inferiore, e se i loro inf e sup coincidono, $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ si definisce come quel valore.

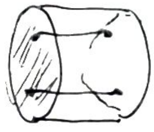
Teo Sia f continua su $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ si ha.

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dxdy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dydz\right)dx$$
$$= \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$ o loro permutazione

Esempio $Q = [0,1]\times[2,3]\times[0,1]$. $\iiint_Q (x+yz)dxdydz = \int_2^3\left(\int_0^1\left(\int_0^1 (x+yz)dz\right)dx\right)dy$
$$= \int_2^3\left(\int_0^1 \left[xz + \frac{yz^2}{2}\right]_0^1 dx\right)dy = \int_2^3\left(\int_0^1 \left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right)dy = \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2}+\frac{yx}{2}\right]_0^1 dy = \int_2^3\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right)dy = \frac{7}{4}.$$

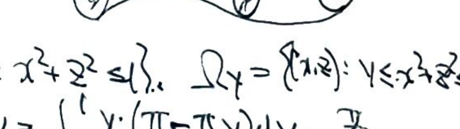
Def Un dominio Ω si dice normale rispetto al piano $z=0$ se c'è un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$, funzioni continue g_1, g_2 su E t.c. $\Omega = \{(x,y,z): (x,y)\in E,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$.
(ci sono definizioni analoghe per $x=0$, $y=0$).

Teo Sia f continua su $\Omega = \{(x,y,z): (x,y)\in E,\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$ Allora
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_E\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$



Esempio $\Omega = \{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ -(x^2+y^2)\le z\le 1\}$. è normale rispetto a $z=0$, $E=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$
$$\iiint_\Omega z\,dxdydz = \iint_E\left(\int_{-(x^2+y^2)}^{1} z\,dz\right)dxdy = \iint_E\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-(x^2+y^2)}^{1}dxdy = \frac{1}{2}\iint_E(1-(x^2+y^2)^2)dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^4)r\,dr\,d\theta = \pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Un'altra possibilità è un dominio Ω t.c. $y\in[a,b]$ per tutti $(x,y,z)\in\Omega$ e per ogni $y\in[a,b]$ $\Omega_y = \{(x,z): (x,y,z)\in\Omega\}$ è misurabile.
Teo Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ come sopra. Sia f una funzione continua e limitata su Ω. Allora
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left(\iint_{\Omega_y} f(x,z)dxdz\right)dy.$$



Esempio $\Omega = \{(x,y,z): 0\le y\le x^2+z^2\le 1\}$, $E=\{(x,z): x^2+z^2\le 1\}$, $\Omega_y = \{(x,z): y\le x^2+z^2\le 1\}$.
dove $y\in[0,1]$. Allora $\iiint_\Omega y\,dxdydz = \int_0^1 y\iint_{\Omega_y} 1\,dxdy = \int_0^1 y\cdot(\pi-\pi y)dy = \frac{\pi}{6}$.
$\Omega_y \longleftrightarrow \{(r,\theta): r\in[\sqrt{y},1],\ \theta\in[0,2\pi]\}$.

Cambiamento di variabili

Teo. Siano $\Omega, D \subset \mathbb{R}^3$ insiemi limitati e misurabili, $\psi: \Omega \to D$, ψ biettiva su $\mathrm{int}\,\Omega$. Sia ψ $C^1(\Omega)$, invertibile. e ψ^{-1} è $C^1(D)$. Sia f continua. Allora

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\psi(u,v,w))\,|\det J_\psi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

Coordinate cilindriche.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}. \quad J_\psi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad |\det J_\psi(r,\theta,z)| = r.$$

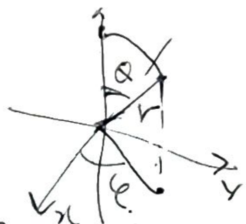
Esempio $D = \{1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3-\sqrt{9-x^2-y^2}\}$.

$\Omega = \{1 \le r^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3-\sqrt{9-r^2}\} = \{1 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 3-\sqrt{9-r^2}\}$.

$$\iiint_D \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega \frac{z-3}{r}\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{3-\sqrt{9-r^2}}(z-3)\,dz\right)d\theta\right)dr$$

$$= 2\pi\int_1^2\left[\frac{(z-3)^2}{2}\right]_0^{3-\sqrt{9-r^2}}dr = \pi\int_0^2(9-r^2-9)\,dr = -\frac{8}{3}\pi.$$

Coordinate sferiche



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \left|\det J_\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right| = r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin\theta\sin^2\theta = r^2\sin\theta$$

Esempio $D = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. $\Omega = \{(r,\theta,\varphi): r\in[0,R],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$

$$\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^R r^2\,dr\right)\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi$$

$= 2\pi\cdot 2\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4\pi}{3}R^3$. è il volume della sfera di raggio R.

$D = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ 0 \le z\}$. $\Omega = \{(r,\theta,\varphi): r\in[0,R],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$.

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R r^3\,dr\right)\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi$$

$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)\,d\theta\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{8}R^4\cdot(\cos 0-\cos\pi) = \frac{\pi R^4}{4}$.

La coordinate z del baricentro della semisfera è $\frac{\pi R^4}{4}\Big/\frac{2\pi}{3}R^3 = \frac{3}{8}R$.

AM2 Lezione 36 Esercizi su integrali multipli 2025.12.11.

Calcolare $\iiint_\Omega \log(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 4,\ y \le 0,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Usiamo le coordinate sferiche: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Le condizioni corrispondono: $x^2+y^2+z^2 \le 4 \longleftrightarrow r^2 \le 4 \longleftrightarrow 0 \le r \le 2$.

Ω' $\quad x \le 0 \longleftrightarrow \sin\varphi \le 0 \longleftrightarrow \pi \le \varphi \le 2\pi$.

$0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \longleftrightarrow \cos\theta \ge 0,\ \cos\theta \le \sin\theta \longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$\iiint_\Omega \log(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} \log(1+\sqrt{r^2})\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_\pi^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 \log(1+r)\,r^2\,dr\right)\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi$$

$$= \int_\pi^{2\pi}\left(3\log 3-\frac{8}{9}\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi$$

$$= \pi\left(3\log 3-\frac{8}{9}\right)\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(3\log 3-\frac{8}{9}\right).$$

$$\int_0^2 \log(1+r)\,r^2\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\log(1+r)-\frac{1}{3}\int\frac{r^3}{1+r}\,dr\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\log 3 - \frac{1}{3}\int_0^2\left(r^2-r+1-\frac{1}{1+r}\right)dr$$

$$= \frac{8}{3}\log 3 - \frac{1}{3}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^2}{2}+r-\log(1+r)\right]_0^2$$

$$= 3\log 3 - \frac{8}{9}.$$

(controllare che il risultato sia positivo).

- Trovare (r,θ,φ) che corrisponde al punto $(\sqrt{3},-1,2) = (x,y,z)$.

$r^2 = \sqrt{3}^2+(-1)^2+2^2 = 8$. $r = 2\sqrt{2}$.

$r\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

$r\sin\theta\cos\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ o $\frac{11\pi}{6}$, $\quad r\sin\theta\sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{6}$.

- $\iiint_\Omega (1+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 < 4,\ 0 \le y \le x\}$.

Coordinate sferiche. $\Omega' = \{(r,\theta,\varphi): r^2 \le 4,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$

$$\iiint_\Omega (1+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'}(1+r^2\cos^2\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^2 (1+r^2\cos^2\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \sin\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 + \cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\Big)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3}\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^\pi + \frac{32}{5}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{16}{3}+\frac{32}{5}\,\frac{2}{3}\right) = \pi\left(\frac{4}{3}+\frac{16}{3\cdot 5}\right. = \pi\cdot\frac{12}{5}$$

· Calcolare il baricentro della semipalla di raggio R senza usare le coordinate sferiche.

$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < R^2,\ z \ge 0\}. = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}.$

$\iiint_\Omega 1\,dxdydz = \frac{4\pi R^3}{3}/2 = \frac{2\pi}{3}R^3$ $\quad \iiint_\Omega x\,dxdydz = 0 = \iiint_\Omega y\,dxdydz = 0$ per symmetria.

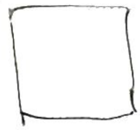
$$\iiint_\Omega z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le R^2}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz\right)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le R^2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy.$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le R^2} \left(R^2-(x^2+y^2)\right)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R (R^2-r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{R^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{2}$$

Dunque $\quad (0, 0, \frac{3}{8}R)$.

Usando l'integrale per strati, $\Omega = \{(x,y,z) : z \in [0,R],\ 0 \le x^2+y^2 \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$.

- Calcolare $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot dx$ dove $\mathbb{F}(x,y) = (y^2, x)$, γ è il bordo del quadrato $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ (usare il Teorema di Green).



$\operatorname{rot}\mathbb{F} = 1-2y. \quad \iint_\Omega (1-2y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 (1-2y)\,dxdy$

$= \int_0^1 [y-y^2]_0^1\,dx = 0.$

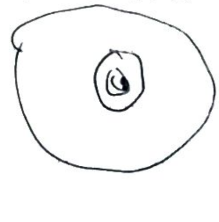
- Calcolare $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot dx$, dove $\mathbb{F}(x,y) = (y^2, x^2)$ γ è il bordo del cerchio $4 = x^2+y^2$, antiorario

$\operatorname{rot}\mathbb{F} = 2x-2y.$

$\iint_\Omega (2x-2y)\,dxdy. \quad \iint_\Omega 2x\,dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 2x\,dx\right)dy = 0$ per simmetria.

Osservazioni

· Si possono considerare integrali multipli impropri, se Ω non è limitato o f non è limitata.
Se Ω non è limitato, si considera prima $\iint_{Q_R\cap\Omega} f(x,y)\,dxdy$, $Q_R = [-R,R]\times[-R,R]$.
e si considera $\lim_{R\to\infty}$. Analogamente, se f non è limitato, si considerano successione di domini su cui f è limitata, e si prende il limite.



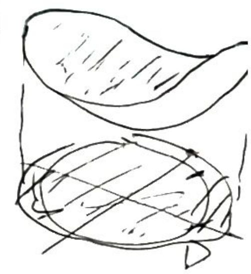
Un tale limite non dipende dalla scelta della successione se $\iint_{Q_R} |f(x,y)|\,dxdy$ è limitata

AM2 Lezione 37 Superfici 2025.12.15.

Programma: Lezione fino al 23
L'ultima settimana: esercizi.

Superfici parametriche

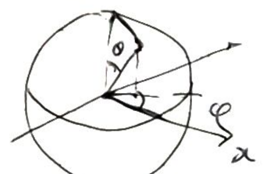
Consideriamo, per esempio, $f(x,y) = 1 + 2x^2 + y^2$ su $D = \{(x,y): x^2+y^2<1\}$



Il grafico $\Sigma = \{(x,y,z): (x,y)\in D,\ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$.
Così una funzione ($C^1(D)$) definisce una superficie in $\mathbb{R}^3$.

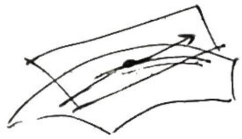
In questo caso, si ha anche $\Sigma = \{(\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y), \sigma_3(x,y)) : (x,y)\in D\}$,
dove $\sigma_1(x,y) = x$, $\sigma_2(x,y) = y$, $\sigma_3(x,y) = f(x,y)$.
Cambiando σ_1 e σ_2, abbiamo diverse superfici.

Sia $R>0$ e consideriamo la sfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Usando le coordinate sferiche con $r=R$,
possiamo parametrizzare: $\sigma_1(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi$, $\sigma_2(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi$, $\sigma_3(\theta,\varphi) = R\cos\theta$.
Allora l'immagine di $(0,\pi)\times(0,2\pi) \ni (\theta,\varphi) \mapsto (\sigma_1(\theta,\varphi), \sigma_2(\theta,\varphi), \sigma_3(\theta,\varphi)) \in \Sigma$
copre la sfera tranne i poli.



Def Sia $\sigma = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$ su $\overline{D}\subset\mathbb{R}^2$, D aperto.
$\Sigma = \sigma(D)$. (Σ,σ) si dice superficie parametrica di Classe C^1 se σ_j sono $C^1(\overline{D})$ e.
σ è iniettiva su D.
Una superficie parametrica (Σ,σ) si dice cartesiana se $\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))$,
o una permutazione di ciò.

Esempi Siano $D = \{(u,v): u^2+v^2<4\}$, $f(u,v) = \sqrt{4-u^2-v^2}$. $\sigma_\pm(u,v) = (u,v,\pm f(u,v))$
$\overline{D} = \{(u,v): u^2+v^2\le 4\}$. $\Sigma_\pm = \sigma_\pm(u,v)$.
Nelle coordinate sferiche, $E = (0,\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)$ $\eta(\theta,\varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta)$
parametrizza tranne $(2\sin\theta, 0, 2\cos\theta)$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.



Piano Tangente

Sia (Σ,σ) una superficie parametrica su D, $(u_0,v_0)\in D$
Per I un intorno di u_0, $\gamma(t) = (\sigma_1(t,v_0), \sigma_2(t,v_0), \sigma_3(t,v_0))$ è una curva in Σ
passa $\sigma(u_0,v_0)$ a $t=u_0$. Dunque il vettore $\gamma'(u_0) =: \sigma_u$ (se non è 0) è un vettore
tangente alla superficie. Analogo per $\tilde{\gamma}(t) = (\sigma_1(u_0,t), \sigma_2(u_0,t), \sigma_3(u_0,t)) =: \sigma_v$

Def. (Σ,σ) si dice regolare in $\sigma(u_0,v_0)\in\Sigma$ se $\sigma_u(u_0,v_0)$ e $\sigma_v(u_0,v_0)$ sono
linearmente indipendenti. Equivalentemente, se $\sigma_u(u_0,v_0)\times\sigma_v(u_0,v_0) \neq 0$.

Si pone $\mathbf{x}_0 = \sigma(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$, $(a,b,c) = \sigma_u(u_0,v_0)\times\sigma_v(u_0,v_0)$.

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ si dice piano tangente a Σ in $\mathbf{x}_0$.

$\dfrac{\sigma_u(u_0,v_0)\times\sigma_v(u_0,v_0)}{\|\sigma_u(u_0,v_0)\times\sigma_v(u_0,v_0)\|}$ si dice il versore normale

<u>Esempio</u> Sfera di raggio R. $(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta) = \sigma(\theta,\varphi)$.

$\sigma_\theta = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta)$, $\sigma_\varphi = (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0)$.

$\sigma_\theta\times\sigma_\varphi = (R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\sin\theta\cos\theta) = R^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

$\|\sigma_\theta\times\sigma_\varphi\| = R^2\sin\theta > 0$.

Sia $\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))$ una superficie parametrica cartesiana. Allora

$\sigma_u = (1,0,\partial_u f(u,v))$, $\sigma_v = (0,1,\partial_v f(u,v))$ sono sempre <u>linearmente indipendenti</u>.

Inoltre, $\sigma_u\times\sigma_v = (-\partial_u f(u,v), -\partial_v f(u,v), 1)$. $\|\sigma_u\times\sigma_v\| = \sqrt{\partial_u f(u,v)^2 + \partial_v f(u,v)^2 + 1}$.

<u>Teo</u> Sia (Σ,σ) una superficie parametrica regolare in $\mathbf{x}_0 = \sigma(u,v)$. Allora esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ t.c. Σ è cartesiana.

Nelle coordinate sferiche, i punti $(R\sin\theta, 0, R\cos\theta)$ non sono inclusi, ma lo sono nelle altre parametrizzazioni. Infatti, possiamo considerare

$(u,v)\mapsto (u,v,\sqrt{R^2-u^2-v^2})$, $(\sqrt{R^2-u^2-v^2}, u, v)$, $(v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}, u)$.

che coprono tutti i punti e sono regolari.

Nel primo caso, $\sigma_u = \left(1,0,-\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$, $\sigma_v\left(0,1,-\frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$.

$\sigma_u\times\sigma_v = \left(-\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, 1\right)$. $\|\sigma_u\times\sigma_v\| = \frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}$. $\frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|} = \left(-\frac{u}{R}, -\frac{v}{R}, \frac{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}{R}\right)$

<u>Esempio</u> Cilindro di raggio R. $(\varphi,z)\in(0,2\pi)\times(0,h)$

$\sigma(\varphi,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$.

$\sigma_\varphi(\varphi,z) = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$. $\sigma_z(\varphi,z) = (0,0,1)$.

$\sigma_\varphi\times\sigma_z = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$. $\|\sigma_\varphi\times\sigma_z\| = R$.

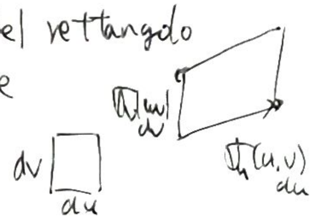
AM2 Lezione 37 Integrali di superficie 2025.12.16.

Def Sia (Σ, σ) una superficie parametrica di $C^1(D)$, $\Sigma = \sigma(\bar{D})$, D aperto, misurabile. Sia $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ misurabile su D. Sia f una funzione continua su Σ.
Si definisce l'integrale di superficie di f su Σ per

$$\iint_\Sigma f\, dS := \iint_D f(\sigma(u,v))\, \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|\, du\, dv.$$

In particolare, se $f(u,v) = 1$, si definisce $\text{area}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, dS = \iint_D \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|\, du\, dv$.

La motivazione è il fatto che $\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|$ rappresenta l'area del rettangolo dei lati $\sigma_u(u,v)$ e $\sigma_v(u,v)$, dunque un piccolo dominio "$du\,dv$" corrisponde all'area "$\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|\, du\, dv$"!



Esempio l'area della sfera S di raggio R.
$\sigma(\theta, \varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$. $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi) = D$.
($\Sigma(\bar{D})$ è la sfera). $\|\sigma_\theta(\theta,\varphi) \times \sigma_\varphi(\theta,\varphi)\| = R^2 \sin\theta$.

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D 1 \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi = R^2\, 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^\pi = 4\pi R^2.$$

D'altra parte, l'area della semisfera si può calcolare usando la parametrizzazione cartesiana:
$D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le R^2\}$, $\sigma(u,v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$.
$\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\| = R / \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$. Con S semisfera,

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D 1\ R/\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\, du\, dv = R \int_0^{2\pi} \int_0^R 1/\sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi R \cdot \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2.$$

Anche se l'area è definita tramite una parametrizzazione, il valore non dipende da ciò.

- $\iint_\Sigma x(y^2 + z^2)\, dS$, dove $\Sigma = \{(x,y,z) : x = yz,\ (y,z) \in \bar{D}\}$. $D = \{(y,z) : y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge y^2\}$.

$\sigma(y,z) = (y, z, yz)$. $\sigma_y(y,z) = (1, 0, z)$, $\sigma_z(y,z) = (0, 1, y)$. $\sigma_y \times \sigma_z = (-z, -y, 1)$.

$$\iint_\Sigma x(y^2 + z^2)\, dS = \iint_D yz(y^2 + z^2) \sqrt{1 + y^2 + z^2}\, dy\, dz = 0 \text{ per simmetria.}$$

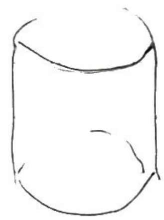
(D è invariante per la trasformazione $y \mapsto -y$, mentre la funzione ottiene -1.)

Def. Sia (Σ, σ) una superficie parametrica su D. $x \in \Sigma$ si dice punto interno a Σ se esistono un intorno $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ t.c. esiste $\Omega \subset D$, t.c. $\sigma|_{\Omega}$ è iniettiva, $x \in \sigma(\Omega)$, Ω aperto.
Si scrive $\Sigma' = \{x \in \Sigma : x \text{ è interno}\}$. $\partial \Sigma = \Sigma \setminus \partial \Sigma'$.

Esempi: • Sia Σ la semisfera di raggio R, σ la parametrizzazione canonica.

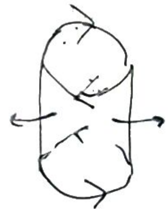
Allora $\Sigma' = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z>0\}$.
Infatti, se $z_0 > 0$, allora possiamo prendere $\Omega = \{(x,y) : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \frac{z_0^2}{2}\}$
Dunque $\partial\Sigma = \Sigma \setminus \partial\Sigma' = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = R^2\}$.

• D'altra parte, se Σ è la sfera intera, è senza bordo. Infatti, ogni punto su Σ è interno prendendo come il polo di una parametrizzazione.



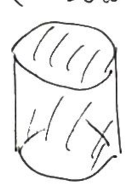
• Il cilindro di raggio R con $D = (0,2\pi)\times(0,h)$.
$\sigma(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. Ogni punto $\sigma(\varphi, z)$ in D è interno: si prende un intorno $\mathcal{U} \subset D$ di (φ, z). I punti $0 \times (0,h)$ sono anche interni rispetto ad altre parametrizzazioni.
$\partial\Sigma = \Sigma \setminus \Sigma' = \{(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z) : \varphi \in (0,2\pi],\ z = 0, h\}$.

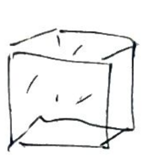
Come abbiamo visto, spesso $\partial\Sigma$ è un'unione di curve.
Una superficie si dice orientabile se esiste un campo vettoriale continuo N^+ su Σ' t.c. $N^+(x)$ è uno dei versori normali.
Sfere, cilindri, sono orientabili. Il nastro di Möbius no.



Data un'orientazione di Σ, l'orientazione positiva è una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ t.c. su D. ($\sigma : D \to \Sigma$) che va lungo ∂D con D alla sinistra.

Σ si dice una superficie regolare a tratti se Σ è unione di superfici (Σ_j, σ_j) t.c. σ_j sono C^1, i bordi di Σ_j sono curvi regolari a tratti C^1, e $\Sigma_j \cap \Sigma_k$ sono parte dei bordi di Σ_j e di Σ_k, e solo un numero finito dei punti appartengono a più Σ_j.





Si possono considerare
$$\iint_\Sigma f\,dS = \sum_{j=1}^{m} \iint_{\Sigma_j} f\,dS.$$

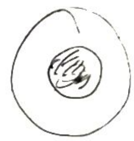
AM2 Lezione 39 Integrale di superficie di campo vettoriale 2025. 12. 18.

Il flusso di un campo vettoriale

Immaginiamo che un campo vettoriale $\mathbb{V}(x)$ rappresenti la velocità di un liquido nel punto x. Immaginiamo anche un quadrato su $\mathbb{R}^3$. Il liquido esce dal quadrato con una certa velocità: se il flusso è orthogonale al quadrato, la quantità del liquido che esce in un tempo breve Δt è $\|\mathbb{V}(x)\|\, dt$, mentre se $\mathbb{V}(t)$ e il quadrato sono paralleli, il liquido non esce. In generale, se v e u rappresentano i lati del quadrato (anche parallelogramma), $u \times v$ è ortogonale al parallelogramma e $\|u \times v\|$ è l'area. dunque $\mathbb{V}(x) \cdot (u \times v)$ rappresenta la velocità del fluido che esce dal parallelogramma

Def $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si dice dominio di Green se.
- Ω è misurabile e $\Omega = \overline{\text{int}\, \Omega}$, $\text{int}\, \Omega$ è connesso e limitato
- $\partial\Omega$ è l'unione disgiunta di superfici senza bordo Σ_k, ognuno è regolare a tratti e orientabili, orientate secondo la normale esterna.

Esempio Una palla meno una palla.
$\partial\Omega$ è l'unione di due sfere.



Def Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green, $\mathbb{V} : D \to \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \subset D$ un campo vettoriale continuo. Si definisce flusso di $\mathbb{V}$ uscente da Ω per
$$\iint_{\partial\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}_e \, dS,$$
dove $\mathbb{N}_e$ è il campo vettorale che definisce l'orientazione (verso l'esterno).

Si nota che $\mathbb{V} \cdot \mathbb{N}_e$ è una funzione continua su $\partial\Omega$, e questo integrale è un integrale di superficie di tale funzione.
(Quando la densità di liquido dipende dalla posizione, si considera anche
$\iint_{\partial\Omega} \rho \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}_e \, dS$. il flusso di massa)

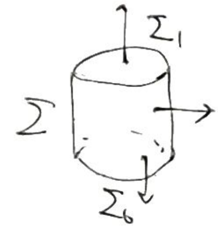
Più in generale, se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare a tratti, orientabile con $\mathbb{N}^+$,
$\iint_{\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}^+ dS$ si dice il flusso di $\mathbb{V}$ attraverso Σ.

Si nota che, con l'orientazione opposta $\mathbb{N}^-$, si ha $\iint_{\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}^- dS = - \int_{\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}^+ dS$.

Oss. Sia (Σ, σ) una superficie parametrica, e scegliamo come l'orientazione quella di $\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)$. Ossia, $\mathbb{N}^+(\sigma(u,v)) = \frac{\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)\|}$

In questo caso, si ha $\iint_\Sigma \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \iint_D \mathbb{V}(\sigma(u,v))\cdot \frac{\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)\|}\|\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)\| du dv$

$= \iint_D \mathbb{V}(\sigma(u,v))\cdot(\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v))\, du dv$, D dominio di σ



Esempi Sia $\mathbb{V}(x,y,z) = (xz, y, x^2 z)$. $\Sigma = \{x^2+y^2=1, z\in[0,1]\}$ con l'orientazione verso l'esterno.

Prendiamo $D = (0,2\pi)\times(0,1)$, $\sigma(\varphi,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$.

$\sigma_\varphi(\varphi,z) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\sigma_z(\varphi,z) = (0,0,1)$.

$\sigma_\varphi(\varphi,z)\times\sigma_z(\varphi,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. verso l'esterno.

$\iint_\Sigma \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \iint_D \mathbb{V}(\sigma(\varphi,z))\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi dz$

$= \iint_D (z\cos\varphi, \sin\varphi, z\cos^2\varphi)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi dz$

$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (z\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi dz = \frac{3}{2}\pi$.

Consideriamo il flusso uscente dal cilindro col tappo e il fondo. Ω: l'interno del cilindro.

$\iint_{\partial\Omega} \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \iint_\Sigma \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS + \iint_{\Sigma_1}\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS + \iint_{\Sigma_0}\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS$.

Per calcolare $\iint_{\Sigma_0}$, dobbiamo parametrizzare il disco. $D = \{(u,v): u^2+v^2<1\}$.

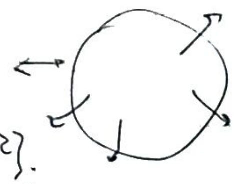
$\sigma(u,v) = (v, u, 0)$. $\sigma_u(u,v) = (0,1,0)$. $\sigma_v(u,v) = (1,0,0)$. $\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) = (0,0,-1)$

$\iint_{\Sigma_0} \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \iint_D (0,u,0)\cdot(0,0,-1)\, du dv = 0$.

Per $\iint_{\Sigma_1}$, si prende $\sigma(u,v) = (u,v,1)$. $\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) = (0,0,1)$.

$\iint_{\Sigma_0}\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \iint_D (u,v,u^2)(0,0,1)\, du dv = \iint_D u^2 du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\, r dr d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$.



- Il flusso uscente di $\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\Sigma = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 = R^2\}$.
  (campo elettrico di una carica.). $\sigma(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\theta, R\cos\theta)$.

$\iint_\Sigma \mathbb{V}\cdot\mathbb{N}^+ dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{1}{R^3}(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)\cdot R^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta\right) d\varphi$

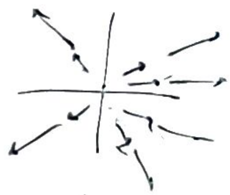
$= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta d\varphi = 4\pi$.

Lezione 40 Il teorema di divergenza 2025. 12. 22

La divergenza

Def Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di $C^1(\Omega)$.

$$\operatorname{div} \mathbb{V}(x) = \nabla \cdot \mathbb{V}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(x).$$



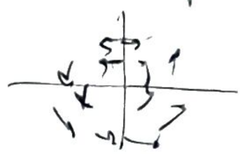
Si nota che $\operatorname{div} \mathbb{V}$ è una funzione (scalare) su Ω.

Esempi • $\mathbb{V}(x,y) = (x,y)$ su $\mathbb{R}^2$. $\operatorname{div} \mathbb{V}(x,y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1$.

• $\mathbb{V}(x,y) = (-y, x)$ su $\mathbb{R}^2$. $\operatorname{div} \mathbb{V}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$.

• $\mathbb{W}(x,y,z) = (xz - y^2, 3xyz, x + z^4)$

$$\operatorname{div} \mathbb{W}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xz - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(x + z^4) = z + 3xz + 4z^3.$$



Il teorema di divergenza in $\mathbb{R}^3$

Teo (di divergenza, di Gauss).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green e sia $\mathbb{V} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di $C^1(\Omega)$.

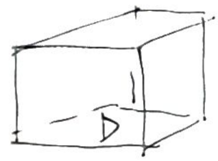
Allora $\iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbb{V} \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}e \, dS$.

dim) Dimostriamo il teorema nel caso speciale seguente:

- Ω è normale rispetto ai piani $z=0$, $x=0$, $y=0$.
- Esistono $D \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ t.c. $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$ α, β $C^1(D)$, ∂D è una curva chiusa e non si interseca con sé (Jordan). Analogo per $x=0$, $y=0$.
- $\Sigma_3 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial D,\ \alpha(x,y) < z < \beta(x,y)\}$ è un'unione di superfici regolari a tratti. Analogo per $x=0$, $y=0$

Scriviamo $\mathbb{N}e = (N_1, N_2, N_3)$. $\mathbb{V} = (V_1, V_2, V_3)$

Dimostriamo che $\iiint_\Omega \frac{\partial V_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} V_3 \cdot N_3 \, dS$.



In modo analogo, si possono dimostrare $\iiint \frac{\partial V_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} V_1 N_1 dS$,

$\iiint_\Omega \frac{\partial V_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} V_2 N_2 dS$.

Dunque, sommando $\iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbb{V} \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}e \, dS$.

Siccome Ω è normale rispetto a $z=0$.

$$\iiint_\Omega \frac{\partial V_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial V_3}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D \big(V_3(x,y,(\beta(x,y))) - V_3(x,y,(\alpha(x,y)))\big) dx dy$$

Si nota che $\partial\Omega$ consiste di

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = \beta(x,y)\}$, $\Sigma_2 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = \alpha(x,y)\}$ e Σ_3

Abbiamo $\sigma(x,y) = (x, y, \beta(x,y))$ e $\sigma_x(x,y) = (1, 0, \partial_x \beta(x,y))$, $\sigma_y = (0, 1, \partial_y \beta(x,y))$.

$\sigma_x(x,y) \times \sigma_y(x,y) = (-\partial_x \beta(x,y), -\partial_y \beta(x,y), 1)$.

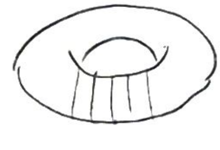
$N_3 = \frac{1}{\|\sigma_x(x,y)\times\sigma_y(x,y)\|}$. Dunque $\iint_{\Sigma_1} V_3\cdot N_3\, dS = \iint_D V_3(x,y,\beta(x,y))\,dxdy$.

Analogamente, notando che $\Sigma_2 = \{(x,y,z) : (x,y)\in D \text{ e } z = \alpha(x,y)\}$, mentre N_e va giù. $\iint_{\Sigma_2} V_3 N_3\, dS = -\iint_D V_3(x,y,\alpha(x,y))\,dxdy$.

Infine, su Σ_3, N_3 non ha z-componente, $N_3=0$.

In totale, $\iint_{\partial\Omega} V_3 N_3\,dS = \sum_{j=1}^{3} \iint_{\Sigma_j} V_3 N_3\,dS = \iint_D \big(V_3(x,y,\beta(x,y)) - V_3(x,y,\alpha(x,y))\big)\,dxdy$.

In generale, se si taglia Ω in piccoli pezzi, sono spesso regioni che soddisfano l'ipotesi



<u>Esempio</u>. Abbiamo calcolato $\iint_{\partial\Omega} W\cdot N_e\,dS$, dove $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2\le 1,\ z\in[0,1]\}$

$W(x,y,z) = (xz, y, x^2 z)$. $= \frac{7}{4}\pi$.

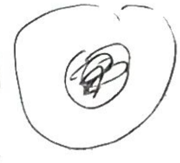
Usiamo il teorema di divergenza.

$\operatorname{div} W(x,y,z) = z+1+x^2$. Con $D = \{(x,y) : x^2+y^2\le 1\}$,

si ha $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y)\in D,\ 0\le z\le 1\}$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} W\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^1 (z+1+x^2)\,dz\right)dxdy = \iint_D \left(\left[\frac{z^2}{2}+z+x^2 z\right]_0^1\right)dxdy$$
$$= \iint_D \left(\frac{3}{2}+x^2\right)dxdy = \frac{3}{2}\pi + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\pi + \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{7}{4}\pi.$$

$\iint_{\partial\Omega} W\cdot N_e\,dS$, dove $\Omega = \overline{B_{R_1}}\setminus\overline{B_{R_2}}$. $B_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\le R^2\}$



$W(x) = \left(\frac{x}{\|x\|^3}, \frac{y}{\|x\|^3}, \frac{z}{\|x\|^3}\right)$.

$$\operatorname{div} W(x) = \frac{\|x\|^3 - x\cdot 3\|x\|^2\cdot x\|x\|^{-1}}{\|x\|^6} + \frac{\|x\|^3 - y\cdot 3\|x\|^2 y\|x\|^{-1}}{\|x\|^6} + \frac{\|x\|^3 - z\, 3\|x\|^2\cdot z\|x\|^{-1}}{\|x\|^6} = 0.$$

$\iint_{\partial\Omega} W\cdot N_e\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} W\,dxdydz = 0$.

$W(x)$ è il campo elettrico della carica a $(0,0,0)$.

<u>Teo</u> Sia W, f derivabile in Ω. Allora $\operatorname{div}(fW) = \nabla f\cdot W + f\operatorname{div} W$.

Sia W $C^2(\Omega)$ Allora $\operatorname{div}\operatorname{rot} W = 0$.

dim) Conti diretti. Per esempio,

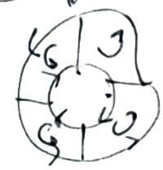
$$\operatorname{div}\operatorname{rot} W = \operatorname{div}\left(\frac{\partial W_3}{\partial y}-\frac{\partial W_2}{\partial z}, \frac{\partial W_1}{\partial z}-\frac{\partial W_3}{\partial x}, \frac{\partial W_2}{\partial x}-\frac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 W_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 W_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial z\partial y}$$

$= 0$ per il teorema di Schwarz.

AM2 Lezione 41 Teorema di rotore 2025.12.22

Richiamo del teorema di Green: $\iint_\Omega \operatorname{rot} \mathbb{F}\, dx\,dy = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\alpha$, dove $\mathbb{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un campo vettoriale, Ω è un dominio di cui il bordo è una curva γ.

Si può generalizzare a domini col bordo che consiste da più curve, dividendo Ω in domini semplici.

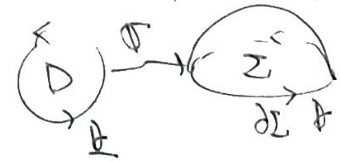


Teo (di rotore, di Stokes).

Sia Σ_+ una superficie regolare a tratti e orientata. Supponiamo che il bordo orientato $\partial\Sigma_+$ sia l'unione disgiunta degli immagini di curve regolari a tratti C^1 di un numero finito, $\gamma_j : I_j \to \partial\Sigma_+$.
Sia $\mathbb{V} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale C^1 su un aperto contenente Σ.
Allora
$$\int_\gamma \mathbb{V} \cdot d\alpha = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}^+ dS.$$

dim). Dimostriamo un caso particolare, in cui:
- Σ è una superficie parametrica con $\sigma : D \to \Sigma$, σ è $C^2(\bar{D})$ e continua.
- D sia un dominio normale (come nel teorema di Green),

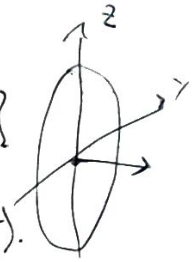
Possiamo scrivere, a meno di scambiare u, v, $\mathbb{N}^+(u,v) = \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) / \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|$.
Scriviamo $\mathbb{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$, $\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$.
$\operatorname{rot} \mathbb{V}(x) = (\partial_y V_3(x) - \partial_z V_2(x), \partial_z V_1(x) - \partial_x V_3(x), \partial_x V_2(x) - \partial_y V_1(x))$.
$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = (\partial_u\sigma_2 \partial_v\sigma_3 - \partial_u\sigma_3 \partial_v\sigma_2, \partial_u\sigma_3 \partial_v\sigma_1 - \partial_u\sigma_1 \partial_v\sigma_3, \partial_u\sigma_1 \partial_v\sigma_2 - \partial_u\sigma_2 \partial_v\sigma_1)$
Consideriamo il caso $\mathbb{V}(x) = (0, 0, V_3(x))$. Allora $\operatorname{rot} \mathbb{V}(x) = (\partial_y V_3, -\partial_x V_3, 0)$.
e $\operatorname{rot} \mathbb{V}(x) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) = \partial_y V_3 (\partial_u\sigma_2 \partial_v\sigma_3 - \partial_u\sigma_3 \partial_v\sigma_2) - \partial_x V_3 (\partial_u\sigma_3 \partial_v\sigma_1 - \partial_u\sigma_1 \partial_v\sigma_3)$
$= -\partial_u\sigma_3 (\partial_y V_3 \partial_v\sigma_2 + \partial_x V_3 \partial_v\sigma_1) + \partial_v\sigma_3 (\partial_y V_3 \partial_u\sigma_2 + \partial_x V_3 \partial_u\sigma_1)$
$= -\partial_u\sigma_3 (\partial_x V_3 \partial_v\sigma_1 + \partial_y V_3 \partial_v\sigma_2 + \partial_z V_3 \partial_v\sigma_3) + \partial_v\sigma_3 (\partial_x V_3 \partial_u\sigma_1 + \partial_y V_3 \partial_u\sigma_2 + \partial_z V_3 \partial_u\sigma_3)$
$= -\partial_u\sigma_3 \cdot \partial_v(V_3 \circ \sigma) + \partial_v\sigma_3 \partial_u(V_3 \circ \sigma)$
$= \partial_v(\partial_u\sigma_3 (V_3 \circ \sigma)) - \partial_u(\partial_v\sigma_3 (V_3 \circ \sigma))$
Per il teorema di Green, $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}^+ dS = \iint_D (\partial_u(\partial_v\sigma_3 (V_3 \circ \sigma)) - \partial_v(\partial_u\sigma_3 (V_3 \circ \sigma)))$
$= \int_{\underline{\gamma}} \mathbb{U}_3 \cdot d\alpha$, con $\mathbb{U}_3(u,v) = (\partial_u\sigma_3 V_3 \circ \sigma, \partial_v\sigma_3 V_3 \circ \sigma)$.



D'altra parte, $\int_\gamma \mathbb{V} \cdot d\alpha = \int_I (0, 0, V_3(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)\, dt$
$= \int_I V_3(\sigma(\underline{\gamma}(t))) \cdot (\partial_u\sigma_3 \cdot \underline{\gamma}_u'(t) + \partial_v\sigma_3 \cdot \underline{\gamma}_v'(t))$
$= \int_{\underline{\gamma}} \mathbb{U}_3\, d\alpha$, usando $\gamma_3'(t) = \frac{d}{dt}(\sigma_3 \circ \underline{\gamma}(t)) = \partial_u\sigma_3 \underline{\gamma}_u'(t) + \partial_v\sigma_3 \underline{\gamma}_v'(t)$.
$\gamma(t) = \sigma \circ \underline{\gamma}(t)$.

Vale analogamente anche per $(0,V_2,0)$ e $(V_1,0,0)$.
Infine. Siccome $\iint_\Sigma \mathbb{V}\cdot \mathbb{N}_+ dS = \iint_\Sigma ((V_1,0,0)+(0,V_2,0)+(0,0,V_3))\cdot \mathbb{N}_+ dS$
e $\int_\gamma \mathbb{V}\cdot d\gamma = \int_\gamma ((V_1,0,0)+(0,V_2,0)+(0,0,V_3))\cdot d\gamma$,
Segue la formula.

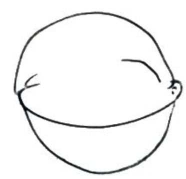
Per Σ più generale, si può dividere Σ in piccolo pezzi e considerare la cancellazione tra gli integrali sui bordi comuni.



Esempi. $\mathbb{V}(x,y,z) = (yz^3, xy^2, xz)$, $\Sigma = \{(x,y,z) : x=-1, \frac{1}{4}y^2+\frac{1}{9}z^2 \le 1\}$
Possiamo prendere $D = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1\}$ $\sigma(u,v) = (-1, 2u, 3v)$.
con $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $t\in[0,2\pi]$, $\tilde{\gamma}(t) = \sigma\circ\underline{\gamma}(t) = (-1, 2\cos t, 3\sin t)$.

$$\int_\gamma \mathbb{V}\cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \mathbb{V}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (9\sin^3 t\cos t, -4\cos^2 t, 3\sin t)\cdot(0, -2\sin t, 3\cos t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (8\cos^2 t\sin t - 9\sin t\cos t)\,dt = \left[-\frac{8}{3}\cos^3 t - \frac{9}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$
$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}_+ dS = \iint_D (0, 3(3\sin t)^2\cos t - \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t)\,(6,0,0)\,du\,dv = 0.$$
$\mathrm{rot}\,\mathbb{V}(x,y,z) = (0, 3z^2y - z, y^2 - z^3)$, $\sigma_u = (0,2,0)$, $\sigma_v = (0,0,3)$

- $\mathbb{V}$ qualsiasi. $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}_e\, dS$, dove Σ è la sfera.



Possiamo dividere la sfera in due parti, parametrizzando Σ_+, Σ_-,
Per Σ_+, e per Σ_-, le direzioni del bordo che corrispondono a $\mathbb{N}_e$ sono l'opposta all'altra. Dunque,
$$\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}_e\, dS = \int_{\partial\Sigma_+} \mathbb{V}\cdot d\gamma + \int_{\partial\Sigma_-} \mathbb{V}\cdot d\gamma = 0.$$

In generale, $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbb{V}\cdot\mathbb{N}_e\, dS = 0$ se Σ non ha bordo.

AM2 Lezione 42 Equazioni differenziali. 2026.01.08

Nel mondo fisico, il moto di un oggetto con la massa è determinata dall'equazione di Newton $m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{G m M}{x(t)^2}$ dove $x(t)$ è la posizione dell'oggetto a tempo t, in un campo gravitazionale $-\frac{GM}{x^2}$, mentre x è il moto che vogliamo sapere.

L'equazione di Newton è un'equazione differenzale (ordinaria), in cui x è il "variabile"; ma è una funzione. Alcune funzioni soddisfano quell'equazione, mentre altre funzioni no.

È un'analogo di equazione algebrica $ax^2+bx+c=0$, o più specificamente $x^2-2x-3=0$: L'equazione è soddisfatta se $x=-1, 3$, non con altri x.

Un'altra equazione differenziale è $\frac{dx}{dt}(t) = ax(t)$, che spiega la cresita della popolazione senza limite (di risorse o altri), in cui la cresita (nascita) è proporzionale alla popolazione attuale.

Consideriamo il caso $a=1$. $\frac{dx}{dt}(t) = x(t)$, ossia la funzione $x(t)$ è uguale alla sua derivata. Le soluzioni sono $x(t) = Ce^t$, dove $C\in\mathbb{R}$.
(si può dimostrare che non ci sono altre).

$\frac{d}{dt}Ce^t = Ce^t$. (mentre, per esempio, $\frac{d}{dt}t^2 = 2t \neq t^2$.)

Quando la cresita è costretta e non è proporzionale ad x si può considerare l'equazione differenziale logistica $\frac{d}{dt}x(t) = ax(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$.

Si possono considerare più variabili (funzioni). Per esempio,
Per considerare la popolazione che contrae una malattia infettiva, la popolazione si può dividere in 3 parti: $S(t)$: suscettibile, $I(t)$: infetti, $R(t)$: rimosso (che ha sviluppato l'immunità), che soddisfano la seguente equazione.

$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta\frac{I(t)S(t)}{N}$ (più si vedono le persone sane e infette, più si contrae)

$\frac{d}{dt}I(t) = +\beta\frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t)$ (le persone infette sviluppano immunità e non infettano più)

$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t)$.

Il modello SIR è fondamentale nello studio di epidemiologia.
Queste hanno un parametro solo t, e sono dette equazioni differenziali ordinarie.

Si possono considerare "variabili" con più parametri. Per esempio.

- Sia $f(x,t)$ la temperatura del punto $x \in \mathbb{R}$ (di qualche oggetto lineare in tempo t).
  soddisfa $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ (l'equazione del calore).
- Sia $f(x,t)$ il spostamento della piccola parte che nella posizione sarebbe in x, in tempo t di una corda.
  $x+\text{f}(x,t)$
  Soddisfa l'equazione di corda $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.
- Siano $\mathbb{E}(x,y,z,t)$, $\mathbb{B}(x,y,z,t)$ il campo elettrico e il campo magnetico in $\mathbb{R}^3$ in tempo t, con $\rho(x,y,z,t)$ la densita di carica (nota) e $\mathbb{J}$ la corrente (nota). μ_0, ε_0 costanti.
  Le equazioni di Maxwell sono.

$$\nabla \cdot \mathbb{E}(x,y,z,t) = \frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbb{B}(x,y,z,t) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbb{E}(x,y,z,t) = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}(x,y,z,t), \quad \nabla \times \mathbb{B}(x,y,z,t) = \mu_0\left(\mathbb{J}(x,y,z,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}(x,y,z,t)\right)$$

Queste equazioni seguono dalle leggi di fisica. Per esempio,

- La legge di Gauss: $\iint_{\Sigma_e} \mathbb{E}\, dS$ è uguale alla carica totale del volume V circondato dalla superficie Σ_e., per ε_0
  Ossia, $\iint_{\Sigma_e} \mathbb{E}\, dS = \iiint_V \frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon_0}\, dx dy dz$.
  Per il teorema di divergenza, il lato sinistro è $\iiint_V \operatorname{div} \mathbb{E}\, dx dy dz$.
  Supponendo che questa legge valga per tutte le superfici, si conclude
  $\operatorname{div} \mathbb{E}\ (= \nabla \cdot \mathbb{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.
- Analogamente, la legge di Maxwell-Faraday, insieme al teorema di rotore, implica $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto ($\rho = 0$, $\mathbb{J} = 0$).

$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$, $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{B}$, $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}$.

Si nota che $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{F}) - \nabla^2 \mathbb{F}$, dove $\nabla^2 \mathbb{F} = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \dots\right)$

Dunque $\nabla^2 \mathbb{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2}{dt^2}\mathbb{E}$, $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

$E_j(x,y,z,t) = C \sin(-\omega t + k_1 x + k_2 y + k_3 z)$ è una soluzione se $\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$

Queste soluzioni rappresentano onde elettromagnetica.

AM2 Lezione 43 Esercizi di riepilogo (serie, integrale di linea) 2026.01.12

$\{a_n\}$: successione. $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ serie. $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3 \cdots$ è una nuova successione.
$\{\sum a_n\}$ converge assolutamente se $\sum |a_n|$ converge. In questo caso, converge anche $\sum a_n$.
Siano $0 \le a_n \le b_n$. Se $\sum b_n$ converge, allora converge pure $\sum a_n$.. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to c > 0$,
Sia $r > 0$. $\sum r^n$ converge se e solo se $r < 1$. $\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$. $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ conv.
Criterio del rapporto. Siano $0 < a_n$, $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. se $L<1$, $\sum a_n$ converge. Se $L>1$, diverge.
Criterio della radice $0 \le a_n$. $L = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$
Siano $a_n > 0$, $a_n > a_{n+1}$, $a_n \to 0$. $\sum (-1)^n a_n$ converge (Leibniz).

· Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3)\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1}{n^4+2n}}\right)\right)$.
(Dire se la serie converge/assolutamente e dimostrarlo).
Si nota che $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quando $x \to 0$.

$$1 - \cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{n^4+2n}}\right) = +\frac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{n^4+2n}}\right)^2 + o\left(\left(\sqrt{\tfrac{1}{n^4+2n}}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^4+2n} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ quando } n \to \infty.$$

Sia $a_n = (2n+3) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{n^4+2n}$, $b_n = (2n+3)\left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{n^4+2n}}\right)$ $\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{n^4+2n} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{2}\frac{1}{n^4+2n}} = 1 > 0$.

Dunque $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum b_n$ converge.
Inoltre, $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$.
Consideriamo $a_n = (2n+3)\frac{1}{2}\frac{1}{n^4+2n}$. $c_n = \frac{1}{n^3}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{(2n+3)\frac{1}{2}\frac{1}{n^4+2n}}{\frac{1}{n^3}} = 1 > 0$.
D'altra parte, $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (per il criterio di integrale).
Dunque converge $\sum a_n$. Dunque converge $\sum b_n$.
Siccome $b_n \ge 0$, converge assolutamente.

Sia $\sum a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze..
r si dice il raggio di convergenza se la serie converge per $|x-x_0| < r$, non converge per $|x-x_0| > r$.
$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1/(a_n)^{\frac{1}{n}}$.

· Determinare il raggio di convergenza e studiare la convergenza ai bordi. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4}\right)^{n^3} (2x-1)^n$!
Poniamo $z = \frac{1}{2}(2x-1) = (x - \frac{1}{2})$ $a_n = \frac{1}{n^2 \log n}\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4}\right)^{n^3} 2^n$
Prima consideriamo $\sum a_n z^n$. Il raggio di convergenza è $\lim_{n\to\infty} 1/(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1/\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} 2 = \frac{1}{2e^2}$
$\frac{1}{2e^2}$ è il raggio di convergenza.
se $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4}\right)^{n^3} \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} e^{n^3 \log(1+\frac{2}{n^2}) - 2n}$
$\log(1 + \frac{2}{n^2}) = \frac{2}{n^2} - \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^2\right)$: $n^3 \log(1 + \frac{2}{n^2}) - 2n = \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{n^2}\right)^2\right) < \frac{8}{n^4}$ eventualmente.
$\frac{1}{n^2 \log n} < \frac{1}{n^2 \log n} e^{\frac{8}{n^2}} < \frac{1}{n^2 \log n} e^8$. $\sum \frac{1}{n^2 \log n} e^8$ converge. . Se $x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2e}$, la serie converge assolutamente

L'integrale di linea. Sia $\mathbb{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (campo vettoriale), $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo,
$\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva rettificabile, o anche di C^1. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ e γ_j sono C^1.
L'integrale di linea di $\mathbb{F}$ lungo γ è $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_I \mathbb{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$.

- $\mathbb{F}$ si dice conservativo su Ω se esiste $U: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{F} = \nabla U$.
- $\mathbb{F}$ (di C^1) si dice irrotazionale se $\mathrm{rot}\, \mathbb{F} (= \nabla \times \mathbb{F}) = 0$.

Se $\mathbb{F}$ è conservativo (e C^1), allora è irrotazionale.
Se $\mathbb{F}$ è irrotazionale su un dominio Ω convesso (o semplicemente connesso), allora è conservativo.
Se $\mathbb{F}$ è conservativo, $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{x} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$. $I = [a,b]$.

- Sia $\mathbb{F}(x,y) = \left(xye^{2x^2} + \frac{2(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \frac{3e^y}{y^2+1} - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$ sul dominio naturale.
- Stabilire se $\mathbb{F}$ è irrotazionale.

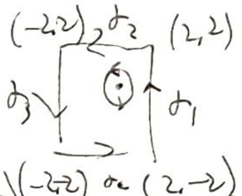
$$\mathrm{rot}\, \mathbb{F}(x,y) = 0 - \frac{2((x-1)^2 + (y-1)^2 - 2(x-1)^2)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} - \left(xe^{2x^2} + \frac{2((x-1)^2 + (y-1)^2 - 2(y-1)^2)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2}\right) - xe^{2x^2}$$

Non è irrotazionale.

- Mostrare che $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$. $\mathbb{F}_1$ è irrotazionale.

$$\mathbb{F}_1 = \left(\frac{2(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}, -\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right) \qquad \mathbb{F}_2 = \left(xye^{2x}, \frac{3e^y}{y^2+1}\right).$$

- Calcolare l'integrale $\int_\gamma \mathbb{F}_j \cdot d\mathbf{x}$, dove γ parametrizza la frontiera positivamente.



$\gamma_1(t) = (2, t)$ $t \in [-2,2]$. $\gamma_1'(t) = (0,1)$. $\mathbb{F}(\gamma_1(t)) = \left(\sim, \frac{3e^t}{t^2+1} - \frac{2}{1+(t-1)^2}\right)$
$\gamma_2(t) = (-t, 2)$. $t \in [-2,2]$. $\gamma_2'(t) = (-1, 0)$ $\mathbb{F}(\gamma_2(t)) = \left(-2te^{2t^2} + \frac{-2}{(t+1)^2+1^2}, \sim\right)$
$\gamma_3(t) = (-2, -t)$. $t \in [-2,2]$ $\gamma_3'(t) = (0,-1)$ $\mathbb{F}(\gamma_3(t)) = \left(\sim, \frac{3e^t}{t^2+1} - \frac{-6}{3^2+(t+1)^2}\right)$
$\gamma_4(t) = (t, -2)$. $t \in [-2,2]$ $\gamma_4'(t) = (1,0)$ $\mathbb{F}(\gamma_4(t)) = \left(-2te^{2t^2} + \frac{6}{(t-1)^2+3^2}, \sim\right)$.

$\sum_j \int_{\gamma_j} \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbf{x} = 0$ (cancellazione)

$$\int_{\gamma_1} \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{x} = \int_{-2}^{2} -\frac{2}{1+(t-1)^2}\, dt = -2\left[\arctan(t-1)\right]_{-2}^{2} = -2(\arctan 1 - \arctan(-3))$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbb{F}_1\, d\mathbf{x} = \int_{-2}^{2} -\frac{2}{1+(t+1)^2}\, dt = -2\left[\arctan(t+1)\right]_{-2}^{2} = -2(\arctan(3) - \arctan(-1))$$

$$\int_{\gamma_3} \mathbb{F}_1\, dx = \int_{-2}^{2} -\frac{6}{3^2+(t-1)^2}\, dt = -2\left[\arctan\frac{t-1}{3}\right]_{-2}^{2} = -2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan(-1)\right)$$

$$\int_{\gamma_4} \mathbb{F}_1\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{-6}{3^2+(t+1)^2}\, dt = -2\left[\arctan\frac{t+1}{3}\right]_{-2}^{2} = -2\left(\arctan(1) - \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$\arctan = -2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 4\right) = -4\pi$. Alternativamente. $\gamma(t) = (r\cos t + 1, r\sin t + 1)$. $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
$\int_\gamma \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbf{x} = \int -2\frac{r^2}{r^2}\, dt = -4\pi$

AM2 Lezione 44 Esercizi di riepilogo (punti critici) 2026.01.13

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Si dice che $x_0 \in \Omega$ è un punto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ globale se $f(x_0) \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} f(x)$ per tutti $x \in \Omega$.

$\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ locale se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 t.c.
$f(x_0) \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} f(x)$ per tutti $x \in \Omega \cap \mathcal{U}$.

Sia Ω aperto, f derivabile su Ω. $x \in \Omega$ si dice un punto critico se $\nabla f(x) = 0$.

Sia $Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$ la matrice Hessiana di f in x.

Sia x un punto critico di f. Se Hf è definita $\begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases}$, allora x è un punto di $\begin{cases} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{cases}$ locale di f. Se Hf ha autovalori positivo e negativo, x è un punto di sella, ossia né minimo locale né massimo locale.

- Determinare la natura dei punti critici di $f(x,y) = 4x^4 + 6y^4 - 3x^2 - 3y^2 + 12$.

$\nabla f(x,y) = (16x^3 - 6x,\ 24y^3 - 6y)$.

Se (x_0, y_0) è un punto critico, $(16x_0^3 - 6x_0,\ 24y_0^3 - 6y_0) = (0,0)$.

$16x_0^3 - 6x_0 = 0,\ 24y_0^3 - 6y_0 = 0 \iff x_0 = 0, \pm\frac{\sqrt6}{4},\ y_0 = 0, \pm\frac{1}{2}$.

$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 48x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 72y_0^2 - 6 \end{pmatrix}$.

$(x_0, y_0) = (0,0)$ $\quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ massimo locale $\quad f(0,0) = 12$.

$(0, \frac12)$ $\quad Hf(0,\frac12) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ sella

$(0, -\frac12)$ $\quad Hf(0,-\frac12) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ sella

$(\frac{\sqrt6}{4}, 0)$ $\quad Hf(\frac{\sqrt6}{4}, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ sella

$(\frac{\sqrt6}{4}, \frac12)$ $\quad Hf(\frac{\sqrt6}{4}, \frac12) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ minimo locale $\quad f(\frac{\sqrt6}{4}, \frac12) = 9 + \frac38 - \frac98 - \frac34 + 12 = 12 \cdot 4 - \frac38$

$(\frac{\sqrt6}{4}, -\frac12)$ $\quad Hf(\frac{\sqrt6}{4}, -\frac12) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ min locale

$(-\frac{\sqrt6}{4}, 0)$ $\quad Hf(\frac{\sqrt6}{4}, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ sella

$(-\frac{\sqrt6}{4}, \frac12)$ $\quad Hf(-\frac{\sqrt6}{4}, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ min locale

$(-\frac{\sqrt6}{4}, -\frac12)$ $\quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ min locale.

Siccome $f(x,y) \to \infty$ quando $|(x,y)| \to \infty$, f assume un minimo globale (perché $f|_{B_R}$, R grande, assume i minimi globali, che sono minimi globali di f).

Quei 4 punti sono punti di minimo globale.

Se la matrice Hessiana non è definita, bisogna studiare il punto critico a mano

- Stabilire se $P=(0,0)$ è un punto di minimo/massimo sella.

  $f(x,y) = -(y^4 - y^5 + 4y^2)(x^4+3x^3)+3$.

  $f(0,0)=3$. per y piccolo, $-(y^4-y^5+4y^2)<0$, mentre se x è piccolo,

  $x^4+3x^3>0$ se $x>0$, $x^4+3x^3<0$ se $x<0$.

  Dunque $(0,0)$ è un punto di sella.

Punti critici vincolati, in $\mathbb{R}^2$

Sia $g:\underset{\mathbb{R}^2}{\Omega}\to\mathbb{R}$, C^1, e $E=\{x\in\Omega : g(x)=0\}$.

Supponiamo che $\nabla g(x)\neq 0$ in $x\in E$.

Sia $\mathcal{U}$ un aperto t.c. $\Omega\subset\mathcal{U}$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$.

Se x è un punto di $\left\{\begin{matrix}\text{minimo locale}\\ \text{massimo}\end{matrix}\right.$ vincolato a E, allora esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ t.c.

$\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)$. (moltiplicatore di Lagrange).

- si risolve $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$, $g(x,y)=0$ per x,y,λ.

- Data la funzione $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}$, determinare i punti di massimo/minimo di f vincolato a $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4=8\}$.

Si prende $g(x,y)=x^4+y^4-8$.

$\nabla f(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$, $\nabla g(x,y)=(4x^3,4y^3)$.

Per il metodo di Lagrange, se (x_0,y_0) è un punto di $\left\{\begin{matrix}\text{min}\\ \text{max}\end{matrix}\right.$ vincolato a E, esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ t.c. $\frac{x_0}{2}=\lambda 4x_0^3$, $\frac{y_0}{2}=\lambda 4y_0^3$, $x_0^4+y_0^4-8=0$

$0=x_0(8\lambda x_0^2-1)$, $0=y_0(8\lambda y_0^2-1)$.

- $x_0=0$ o ($\lambda>0$ e) $x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{8\lambda}}$,
- $y_0=0$ o ($\lambda>0$ e) $y_0=\pm\frac{1}{\sqrt{8\lambda}}$

① $x_0=0$ $y_0\neq0$. Dunque $\lambda>0$ e $y_0=\pm\frac{1}{\sqrt{8\lambda}}$, $y_0^2=\frac{1}{8\lambda}=64\lambda \Rightarrow \lambda=+\frac{1}{16\sqrt2}$.

$(0,\pm\sqrt{2\sqrt2})$. $f(0,\pm\sqrt{2\sqrt2})=\frac{2\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$

② $x_0=\pm\sqrt{\frac{1}{8\lambda}}$. per simmetria, se $y_0=0$, allora $(x_0,y_0)=(\pm\sqrt{2\sqrt2},0)$, $f(\pm\sqrt{2\sqrt2},0)=\frac{\sqrt2}{2}$. min

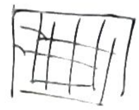
③ $x_0=\pm\sqrt{\frac{1}{8\lambda}}$, $y_0\neq0$, dunque $\lambda>0$ e $y_0=\pm\frac{1}{\sqrt{8\lambda}}$. $x_0^4+y_0^4=8 \Rightarrow \frac{1}{32\lambda^2}=8 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{16}$.

$(x_0,y_0)=(\sqrt2,\sqrt2),(-\sqrt2,\sqrt2),(\sqrt2,-\sqrt2),(-\sqrt2,-\sqrt2)$.

$f(x_0,y_0)=1$. max. perché E è compatto.

AM2 Lezione 45 Esercizi di riepilogo (integrali) 2026.01.15

Sia $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, $f:Q\to\mathbb{R}$.



$P=\{Q_{ij}\}$ una partizione di Q. $s(Q)=\sum_{ij}\inf_{Q_{ij}} f\,|Q_{ij}|$

$S(Q)=\sum_{ij}\sup_{Q_{ij}} f\,|Q_{ij}|$.

f si dice integrabile se $\sup_{Q} s(Q)=\inf_{Q} S(Q)=\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$.

Sia $\Omega\subset Q$, $\Omega=\{(x,y): x\in[a,b],\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ per qualche funzione continua g_1, g_2.
Se f è continua su Ω, allora f è integrabile e $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$.

Cambiamento di variabili: coordinate polari.
Supponiamo che $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ nelle coordinate polari corrisponde a $D\subset\mathbb{R}^2$ nelle coordinate xy.
Allora $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.
In generale, con $\Phi(u,v)=\begin{pmatrix}X(u,v)\\ Y(u,v)\end{pmatrix}$, $J(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v}\end{pmatrix}$, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Omega f(X(u,v),Y(u,v))\,|\det J(u,v)|\,du\,dv$

· Calcolare $\iint_D\left(13x^3e^y+\frac{|xy|\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)dx\,dy$. $D=\{(x,y): y>|x|\}\cap\{(x,y): \pi<x^2+y^2<2\pi\}$

$\iint_D 13x^3e^y\,dx\,dy=\iint_D 13(-x)^3e^y\,dx\,dy=0$ perché D è simmetrica rispetto a $x\mapsto -x$.

Per calcolare il secondo integrale, si nota che $y\ge 0$ in D e la funzione è pari rispetto a x.

$$\iint_D\frac{|xy|\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy=2\int_{D'}\frac{xy\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D'=\{(x,y): 0\le x<y\}.$$

$\Omega=\{(r,\theta): \sqrt{\pi}<r<\sqrt{2\pi},\ \cos\theta<\sin\theta\}$
$=\{(r,\theta): \sqrt{\pi}<r<\sqrt{2\pi},\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\}$

$$=2\int_\Omega\frac{r^2\cos\theta\sin\theta\cdot\sin(r^2)}{r^2}\,r\,dr\,dy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_\pi^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\ r\sin(r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\left[-\cos(r^2)\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}$$

$2\cos\theta\sin\theta=\sin(2\theta)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2\theta)\,\cancel{d\theta}\,(-1-(-(-1)))=\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}.$$

In $\mathbb{R}^3$, coordinate sferiche $x=r\cos\varphi\sin\theta$
$y=r\sin\varphi\sin\theta$
$z=r\cos\theta$

$|\det J(r,\varphi,\theta)|=r^2\sin\theta$.

Integrale di superficie.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$, $\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)) \subset \mathbb{R}^3$, σ iniettiva, C^1.

$\Sigma = \sigma(D)$. Si dice che σ parametrizza Σ.

$\dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ è un vettore ortogonale alla superficie Σ. "versore"

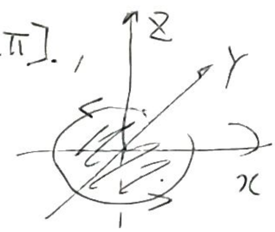
Per una funzione f su Σ, si definisce $\int_\Sigma f\, dS = \int_D f(\sigma(u,v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv$.

Per un campo vettoriale $\mathbb{F}$ si definisce $\int_\Sigma \mathbb{F} \cdot N_+ dS$, dove Σ_+ è la superficie con l'orientazione data dal versore. $= \int_D \mathbb{F}(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)\, du\, dv$.

Il teorema di divergenza: $\iiint_V \operatorname{div} \mathbb{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma \mathbb{F} \cdot N_e\, dS$, dove V è un volume circondato dalla superficie Σ, N_e un versore verso l'esterno.

Il teorema di rotore: $\iint_\Sigma \mathbb{F} \cdot N_+ dS = \int_\gamma \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot dx$, dove Σ è una superficie, γ è la curva che parametrizza il bordo di Σ t.c. su D, il bordo vede D a sinistra e N_+ è il versore dato da σ.

- Sia $\mathbb{F}(x,y,z) = (-y^3 e^z + y^2 e^{xy^2}, x^3 \cos z + 2xy e^{xy^2}, xyz)$.
  Calcolare $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$, usando il teorema di rotore.



Si prende $\Sigma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1, z = 0\}$.

Σ si parametrizza con $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ; u^2 + v^2 \le 1\}$, $\sigma(u,v) = (u, v, 0)$.

$\sigma_u = (1,0,0)$, $\sigma_v = (0,1,0)$. $\sigma_u \times \sigma_v = (0,0,1)$

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \left(xz - (-x^3 \sin z), -y^3 e^z - yz, 3x^2 \cos z + (2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}) - (-3y^2 e^z + 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}\right)$$

$$= (\_\_\_\_, \_\_\_\_, 3x^2 \cos z + 3y^2 e^z).$$

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dx = \int_D \mathbb{F}(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)\, du\, dv = \int_D 3(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi.$$