

Informazione: Sebastiano Carpi \rightarrow Didattica \rightarrow AM1 25/26.

Testo: Analisi Matematica (Bertsch, Dal Passo, Giacomelli) McGraw-Hill

Ricevimento: su appuntamento (hoxt@mat.uniroma2.it) or Teams

Programma: Numeri reali, funzioni, successioni, limiti, continuità di funzioni, derivate, studio del grafico, formula di Taylor, integrale di Riemann, teorema fondamentale di calcolo, integrali impropri.

Tutoraggio: Giovedì 14:00h.

Perché analisi matematica?

Nelle scienze, studiamo gli aspetti quantitativi degli oggetti.

Quando una quantità cambia col tempo, vorremmo sapere quanto velocemente cambia (derivata) e il risultato (integrazione).

Un altro esempio è la questione di ottimizzazione: trovare il massimo o il minimo di una quantità.

In AM1, si studiano funzioni di una variabile. Questo è una base degli argomenti di AM2, in cui si studiano funzioni di più variabili, che hanno applicazioni a computer graphics, comunicazione via web, etc.

Suggerimenti per lo studio: prendere note. fare esercizi. considerare implicazioni logiche di vari teoremi.

Richiami della matematica di base.

(cf. uniroma2, ingegneria \rightarrow futuri studenti \rightarrow test di autovalutazione).

• Funzioni trigonometriche $\sin x, \cos x, \tan x$.

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

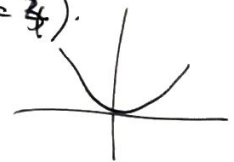
• Equazioni e disuguaglianze. $x^2 + 3x + 2 = 0$. $x = -2, -1$. $x^2 + 3x + 2 > 0$.

• Radici. $(\sqrt{2})^2 = 2$. $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$

• Exp, log. a^x . $2^3 = 8$, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ ($(\sqrt[3]{4})^3 = 4$).

$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. $\log_2 8 = 3$, $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, ...

• Grafico. $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



Richiami di logica e insiemistica

In matematica, si considerano "affermazioni" che possono essere vere o false.

" $2+2=4$ " è vera, " $2+2=5$ " è falsa.

È possibile comporre affermazioni con "e" "o" "non" "se..., allora...".

Esempi • " $2+2=4$ " e " $1+3=5$ " è falsa.

• " $2+2=4$ " o " $1+3=5$ " è vera.

• "se " $1+3=5$ ", allora " $2+2=5$ " è vera, perché l'ipotesi è falsa.

• "Non esiste x tale che $P(x)$ " significa "per tutti x , non $P(x)$ ".

• "Non per tutti x , vale $P(x)$ " significa "esiste un x tale che non $P(x)$ ".

In matematica, si considerano "insiemi" degli oggetti matematici.

Esempi • \mathbb{N} : l'insieme dei numeri naturali = $\{1, 2, 3, \dots\}$.

\mathbb{Z} : l'insieme dei numeri interi = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

\mathbb{Q} : l'insieme dei numeri razionali = $\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$.

$A = \{0, 1, 2, 3\}$. $x \in A$ significa " x appartiene a A ".

Ci sono due modi per definire insiemi.

• per nomina. $A = \{0, 1, 2, 3\}$. $B = \{1, 10, 100\}$.

• per specificazione. $A = \{x \in \mathbb{Z} : \text{esiste } y \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = 2y\}$ = l'insieme dei numeri pari.

$\emptyset = \{\}$, l'insieme vuoto.

- $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

Se per tutti $x \in A$ vale $x \in B$, si dice che A è un sottoinsieme di B . $A \subset B$.

Esempi. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $A \subset B$. $A \subset \mathbb{N}$. $A \subset \mathbb{Z}$.

Due insiemi A, B sono identici se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Stano A, B due insiemi. L'unione $A \cup B$ è l'insieme che contiene gli elementi di A e B e niente altro. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

L'intersezione $A \cap B$ è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B . $A \cap B = \{1, 3\}$

La differenza $A \setminus B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B . $A \setminus B = \{2\}$.

Stano $P(x), Q(x)$ due affermazioni su x ("predicati") del dominio D . $A = \{x \in D : P(x)\}$

Allora vale che $A \cap B = \{x \in D : P(x) \text{ e } Q(x)\}$.

$B = \{x \in D : Q(x)\}$.

$A \cup B = \{x \in D : P(x) \text{ o } Q(x)\}$.

$A^c = \{x \in D : \text{non } P(x)\}$. (A nel testo).

$A \setminus B = \{x \in D : P(x) \text{ e non } Q(x)\}$.

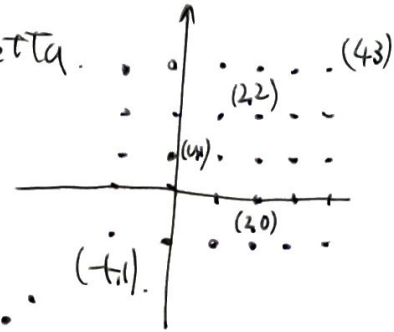
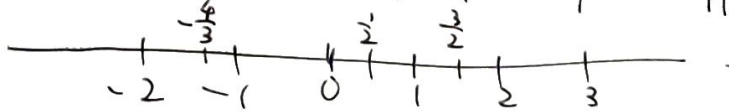
Prodotto cartesiano degli insiemi

Stano A, B due insiemi. Si può considerare il loro prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, l'insieme di tutte le coppie ordinate.

Esempio $A = \{3, 4, 7\}$, $B = \{0, 1\}$. $A \times B = \{(3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (7, 0), (7, 1)\}$.

Il prodotto cartesiano ha un significato geometrico.

Richiamiamo che $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ si possono rappresentare sulla retta.



Allora un punto del prodotto cartesiano si rappresenta sul piano.

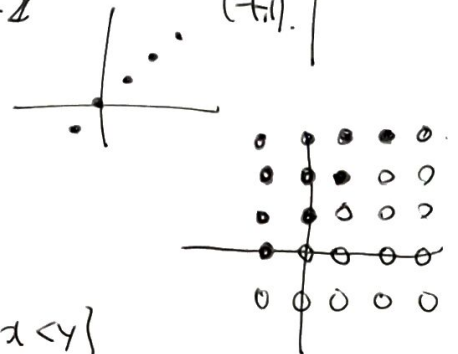
Consideriamo la relazione $x = y$. Il sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che soddisfa questa relazione si trova sulla retta.

Analogo per $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

In questo modo, una relazione si può rappresentare con un grafico.

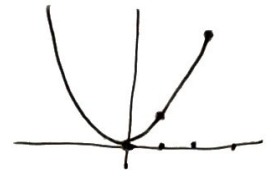
Analogamente, consideriamo la relazione $x < y$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Equivalentemente, si considera l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}$



Si può anche considerare la relazione $y = x^2$ in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Si considera l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y = x^2\}$.



In generale, un sottoinsieme del prodotto $A \times A$ si chiama una relazione.

$x = y$ è una relazione, $x < y$ è un'altra.

Per un insieme X , un'operazione in X associa ad ogni coppia ordinata $(x, y) \in X \times X$ un elemento $z \in X$.

\mathbb{Q} ha operazioni importanti: tra cui $x + y$, $x \cdot y$.

Richiamiamo le loro proprietà. L'addizione $+$. Stano $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

1) $x + y = y + x$ (commutatività). 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatività)

3) Esiste un sdo elemento, detto 0, tale che $x + 0 = x$ per tutti $x \in \mathbb{Q}$.

4) Esiste un sdo elemento, detto l'opposto $-x$, d.c. $x + (-x) = 0$.

Si definisce $x - y := x + (-y)$.

\mathbb{Q} possiede anche la moltiplicazione \cdot . Siano $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

5) $x \cdot y = y \cdot x$ (commutatività) 6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associatività),

7) Esiste un solo elemento, detto 1, t.c. $x \cdot 1 = x$ per tutti $x \in \mathbb{Q}$.

8) Se $x \neq 0$, esiste un solo elemento, detto reciproco o inverso. x^{-1} , s.c. $x \cdot x^{-1} = 1$.

Si possono scrivere $x + y + z (= (x+y)+z)$, $x/y := x \cdot y^{-1}$.

Scriviamo anche $x^2 := x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, ...

9) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (proprietà distributiva).

Inoltre, \mathbb{Q} è munito con la relazione \leq "maggiore o uguale". $x < y$ significa

10) Se $x \leq y$, allora $x+z \leq y+z$.

$x \leq y$ e $x \neq y$.

11) Se $x \leq y$ e $0 \leq z$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Da queste proprietà, si possono dimostrare

12) $0 \leq x$, allora $-x \leq 0$. Se $y \leq x$, allora $-x \leq -y$.

(per 10) con $z = (-x)$, $0 + (-x) = -x \leq x + (-x) = 0$).

13) se $0 < x$, allora $0 < x^{-1}$. se $0 \leq y \leq x$, allora $x^{-1} \leq y^{-1}$.

14) se $x \leq y$, $z \leq 0$, allora $y \cdot z \leq x \cdot z$.

15) Se $x \neq 0$, allora $0 < x^2$. 16) $x^2 \neq 0$ non vale.

Rappresentazione decimale

Ogni numero razionale si può rappresentare in quella decimale.

Se $x = \frac{p}{q}$, allora $x = \pm r \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots$, con $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Per esempio, $x = \frac{3}{2} = 0.428521428521 \dots$

Per $x \in \mathbb{Q}$, tale rappresentazione è periodica.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 30} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \end{array}$$

Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Lemma Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ s.c. $x^2 = 2$.

(dim). Per assurdo, supponiamo che $x = \frac{p}{q}$, $(\frac{p}{q})^2 = 2$, $p, q \in \mathbb{N}$, primi.

Risulta $p^2 = 2q^2$, dunque p deve essere pari, e q è dispari.

Scriviamo $p = 2p'$, $p' \in \mathbb{N}$. Allora $(2p')^2 = 4(p')^2 = 2q^2$,

dunque $2p'^2 = q^2$, e q sarebbe pari, contraddizione.

Si conclude che non esiste un tale $x \in \mathbb{Q}$.

Abbiamo visto che non c'è un numero razionale x t.c. $x^2=2$.

D'altra parte, ci sono numeri razionali x t.c. x^2 è molto vicino a 2.

Si osserva che $(1.4)^2=1.96$, $(1.5)^2=2.25$.
 $(1.41)^2=1.9881$, $(1.42)^2=2.0164$.

Procedendo così, si determina un allineamento decimale $1.41421356 \dots$.

Definizione) Un numero reale è un allineamento decimale proprio (la parte finale non è $\dots 999 \dots 9 -$). L'insieme dei numeri reali si indica con \mathbb{R} .

Sappiamo che $x \in \mathbb{Q}$ ha un allineamento decimale periodico.

Quelli non periodici si chiamano irrazionali. $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Le proprietà 1) - 6) valgono anche per \mathbb{R} . Inoltre,

Teorema). Siano $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $x < y$. Allora:

esistono (infiniti) $z \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < z < y$.

Infatti, sia x che y hanno l'allineamento decimale, e siccome $x < y$.

Dunque $x < \frac{x+y}{2} < y$. $\frac{x+y}{2}$ si può approssimare troncando (l'allineamento, ottenendo $z \in \mathbb{Q}$).

Intervalli:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si pone

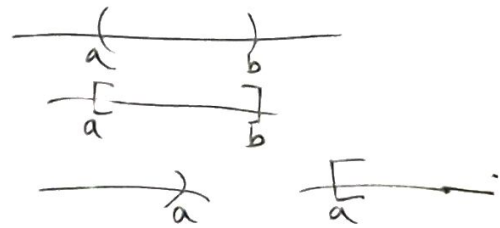
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

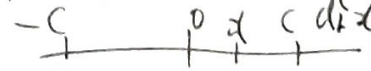
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$



Valore assoluto

Def. Si indica $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e si chiama il valore assoluto (o modulo)

Sia $C \geq 0$: Vale $|x| \leq C$ se e solo se $-C \leq x \leq C$.



In particolare, $-|x| \leq x \leq |x|$.

Prop Per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, vale $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

dim) Si ha $-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|$, $-|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$. Dunque $-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|$

Def Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $a \leq k$ per tutti $a \in A$ (analogamente "minorante"). A si dice limitato superiormente se esiste un maggiorante ("inferiormente" se esiste un minorante).
 A si dice limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Def Se un maggiorante di A appartiene ad A , si dice il massimo (analogo. minimo).

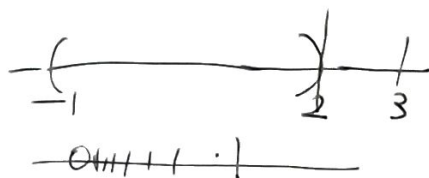
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. $\beta \in \mathbb{R}$ è detto l'estremo superiore se è il minimo dei maggioranti di A .
 $\sup A = \min \{ k \in \mathbb{R} : k \text{ è maggiorante di } A \}$.
 $\inf A = \max \{ k \in \mathbb{R} : k \text{ è minorante di } A \}$.

Esempi $A = [0, 1]$. 2 è un maggiorante di A .
 1 è il massimo di A .
 1 è il $\sup A$.



$B = (-1, 2)$

3 è un maggiorante di B .
 B non ha il massimo.
 2 è $\sup B$.



$C = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$. 1 è il massimo di C . 0 è un minorante di C , non ha il minimo.

Teo Sia $A \subset \mathbb{R}$ finito (ha un numero finito di elementi). Allora A ha il massimo e il minimo.

Teo Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, limitato superiormente. Allora esiste $\sup A$.

Questa proprietà di \mathbb{R} si chiama "completezza".

Questo vale perché se A è limitato, si può decidere l'allineamento passo per passo.

A differenza di questo, consideriamo $A = \{1, 4, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\} \subset \mathbb{Q}$.

È un sottoinsieme di \mathbb{Q} , limitato superiormente, ma $\sup A (= \sqrt{2})$ non esiste in \mathbb{Q} , solo in \mathbb{R} .

La struttura di \mathbb{R} si possono caratterizzare con (i)-(iv) e la completezza.

(non c'è un altro modo di "riempire" \mathbb{Q}).

L'insieme \mathbb{R} si può rappresentare graficamente come una retta.



Teams, usare codice dub5g6c

Abbiamo definito \mathbb{R} , e abbiamo visto che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ma $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Un altro modo per vedere che esiste $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ è quello di considerare $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = A$. Allora A è limitato, e si può dimostrare che $(\sup A)^2 = 2$, ossia $\sup A = \sqrt{2}$.

Teo (Proprietà di Archimede per \mathbb{Q}). Siano $x, y \in \mathbb{Q}$, $0 < x < y$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ s.c. $n \cdot x > y$.

dim) Si scrivono $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$. Si prende $n = rq$, allora $n \cdot x = rp > \frac{r}{s}$ (perché $p, s \in \mathbb{N}$).

Un'affermazione analoga vale per \mathbb{R} : infatti, se $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$, possiamo prendere $x', y' \in \mathbb{Q}$, $0 < x' < x < y < y'$, e si trova $n \in \mathbb{N}$ s.c. $n x' > y'$. Allora $n x > n x' > y' > y$.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e limitato (superiormente). Abbiamo definito $\sup A$ come il minimo dei maggioranti di A .

Lemma Sia $l \in \mathbb{R}$. $l = \sup A$ se e solo se $\begin{cases} \text{(i)} & l \text{ è un maggiorante di } A \\ \text{(ii)} & \text{per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } x \in A \\ & \text{s.c. } l - \varepsilon < x. \end{cases}$

dim) Sia l un maggiorante di A . (ii) esprime la condizione che, qualunque numero più piccolo di l ($l - \varepsilon$) non può essere un maggiorante di A . Dunque l è il maggiorante minimo, ossia $\sup A$.

Analogamente per inf.

Teo. Sia $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq y$. Allora esiste $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$ s.c. $y = x^2$.

dim) Si pone $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. A è limitato, infatti, siccome $x^2 < 2 < 4 = 2^2$, vale $x < 2$ (per assurdo, se $x \geq 2$, $x^2 \geq 4$, contraddizione). $1 \in A$. Si pone $l = \sup A$.

Dimostriamo che $l^2 = 2$, escludendo le possibilità $l^2 > 2$ e $l^2 < 2$.

(i) Supponiamo $l^2 < 2$. Prendiamo $\varepsilon < \frac{2 - l^2}{2l + 1}$, 1. (per densità di \mathbb{R}).

$$(l + \varepsilon)^2 = l^2 + 2l\varepsilon + \varepsilon^2 < l^2 + 2l\varepsilon + \varepsilon = l^2 + (2l + 1)\varepsilon < l^2 + 2 - l^2 = 2.$$

Dunque $l + \varepsilon \in A$, ma contraddice $l = \sup A$. Escluso.

(ii) Supponiamo $l^2 > 2$. Prendiamo $\varepsilon < \frac{l^2 - 2}{2l}$, ossia $2 < l^2 - 2l\varepsilon$.

$(l - \varepsilon)^2 = l^2 - 2l\varepsilon + \varepsilon^2 > l^2 - 2l\varepsilon > 2$. Allora $l - \varepsilon$ è un maggiorante di A , contraddizione con $l = \sup A$.

Dunque si ha $l^2 = 2$.

(Testo capitolo 2). Funzioni

Siano X, Y insiemi (tipicamente sottinsiemi di \mathbb{R}) non vuoti.

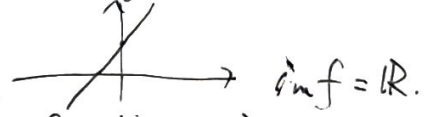
Una funzione f da X in Y associa a ogni $x \in X$ uno solo elemento $y \in Y$.
si scrive $y = f(x)$.

L'insieme X si dice il dominio di f , e Y si dice il codominio di f . $X = \text{dom} f$

Il grafico di f è $\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$. L'immagine è

$\{y \in Y : \text{esiste } x \in X \text{ s.c. } y = f(x)\}$.

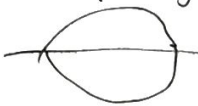

Esempi • $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.



• $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = x^2$.



im $f = [0, \infty)$

•  non è il grafico di una funzione, ma  si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Analogamente, la radice n -esima $x^{1/n} (= \sqrt[n]{x})$ si può definire per $x \geq 0, n \in \mathbb{R}$,
e risulta $x^{1/n} \geq 0$.

• $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$



im $f = [0, \infty)$. Infatti, per ogni $x \geq 0$, vale $x = \sqrt{x^2}$.

Per una una funzione f definita su X in Y , si indica $f: X \rightarrow Y$.

Sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Si può definire la restrizione di f su A , ossia,
 $f|_A$ associa ad $x \in A$ il valore $f(x)$.

Per una funzione $X \rightarrow Y$, vale $\text{im} f \subset Y$. f si può sempre vedere come
 $f: X \rightarrow \text{im} X$.

Per una funzione data da una formula, il dominio naturale è l'insieme X s.c.
la formula $f(x)$ ha senso per $x \in X$.

Esempi • $f(x) = \frac{1}{x}$. Il dominio naturale è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

• $f(x) = \sqrt{x}$. Il dominio naturale è $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\} = [0, \infty)$.

• $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Il dominio naturale è $\{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$.

Ricordiamoci che una funzione f con il dominio X e il codominio Y è una corrispondenza a $x \in X$ di $f(x) \in Y$. Si scrive $f: X \rightarrow Y$.

Def Una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con il dominio \mathbb{N} è detta una successione.

Si usa spesso la notazione $a_n := f(n)$.

Significa che abbiamo una successione dei numeri reali a_1, a_2, a_3, \dots .

Esempi - $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ è una successione.

• $f(n) = n!$ è una successione. $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$.



Funzioni definite su $\mathbb{N} \cup \{0\}$, oppure $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 10\}$ si chiamano successioni.

Per esempio, è comune definire $0! = 1$, e $f(n) = n!$ è definita su $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$f(n) = \sqrt{18-n^2}$ è definita solo per $n > 5$

Funzioni monotone

Siano $A \subset X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è

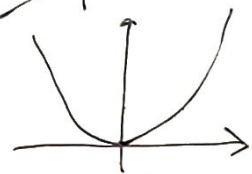
- (i) crescente in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.
 - (ii) strettamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$.
 - (iii) decrescente - se $f(x_1) \geq f(x_2)$.
 - (iv) strettamente decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$.
- Si dice f monotona se vale uno dei casi.

Esempi - $f(x) = x$ è strettamente crescente su \mathbb{R}

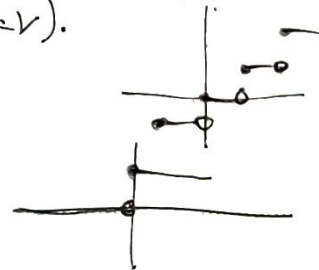


• $f(x) = x^2$ non è monotona in \mathbb{R} .

Ma è strettamente crescente in $[0, \infty)$, e strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$



• $f(x) = [x]$, la parte intera. ($x = n, n+1, n+2, \dots$ - $[x] = n$).
 è crescente su \mathbb{R} , ma non strettamente.



$[1] = 1$, $[\frac{1}{2}] = 0$, $[\pi] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$.

• $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ il gradino di Heaviside.

crescente ma non strettamente.

$$\bullet \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Crescente ma non strettamente.

Siano $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Si definiscono $(f+g): X \cap Y \rightarrow \mathbb{R}$. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

$f \cdot g: X \cap Y \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$a f: X \rightarrow \mathbb{R}$. $(a f)(x) = a f(x)$.

$f/g: \{x \in X \cap Y: g(x) \neq 0\}$. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Sia la funzione d'identità $\operatorname{id}(x) = x$. A partire da id , con $+$, \cdot , e la moltiplicazione con $a \in \mathbb{R}$, si costruiscono i polinomi.

$\bullet f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 3x + 2$, $h(x) = 10x^{100} + 78x^{23} - 4$.

In generale, un polinomio si scrive $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

$\bullet f(x) = \frac{1}{x}$, definita su $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.



Simmetrie

Siano $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) f si dice pari se per $x \in X$, $-x \in X$ e $f(-x) = f(x)$

(ii) dispari $f(-x) = -f(x)$

(iii) periodica (col periodo p) se per $x \in X$, $x+p \in X$ e $f(x+p) = f(x)$.



Esempi. $f(x) = x, x^3$ sono dispari.

$f(x) = x^2, x^4$ sono pari.

$f(x) = \sin x, \cos x, \tan x$ sono periodiche ($P = 2\pi, 2\pi, \pi$).

Funzioni potenza

Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$. $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Si pone, per $x \in (0, \infty)$,

$x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. (quando $p \geq 0$, si può anche definire per $x = 0$,
 q è dispari, si può anche definire per $x < 0$).

In $[0, \infty)$, se $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ è strettamente crescente

$\alpha < 0$ $x \mapsto x^\alpha$ decrescente

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$



Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. f si dice limitata (superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ s.c. per tutti $x \in X$, $f(x) \leq M$ / inferiormente $M \leq f(x)$).

Ovvero, se $\inf f$ è limitata (superiormente / inferiormente).

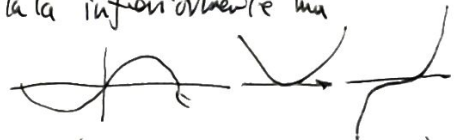
f si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente, ovvero se $\inf f$ è limitata.

Esempi $f(x) = \sin x$ è limitata. $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente ma non superiormente. $f(x) = x^3$ non è limitata né sup né inf.

La successione $a_n = (-1)^n$ è limitata.

$f(x)$ è limitata se il dominio è ristretto a $[-1, 1]$ (o qualunque intervallo $[a, b]$).

Si dice che $f(x)$ è limitata in A se $f|_A$ è limitata.



Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. f si dice positiva/non negativa/negativa/non positiva in A se, per tutti $x \in A$, $f(x) > / \geq / < / \leq 0$.

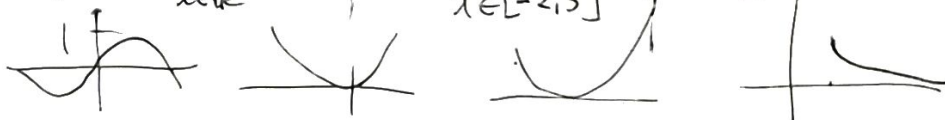
Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset X$. Si definiscono

$$\sup_A f = \begin{cases} \sup_{\infty} (\inf f) & \text{se } f \text{ è limitata superiormente} \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \text{Analogo per } \inf_A f \quad -\infty$$

Si scrivono anche $\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$.

Esempi $\sup_{\mathbb{R}} \sin x = 1$. $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 = \infty$. $\sup_{x \in [-2, 3]} x^2 = 9$.

$$\inf_{x \in (1, \infty)} \frac{1}{x} = 0.$$



Def Siano $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset X$. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di f in A se esiste $x_0 \in A$ s.c. $f(x_0) = M$ e $\inf f \leq M$. (analogo per il minimo).

Si scrive $M = \max_A f = \max_{x \in A} f(x)$.

Esempi $\max_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1$, $\min_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0$, $\max_{x \in [1, \infty)} \frac{1}{x} = 1$.

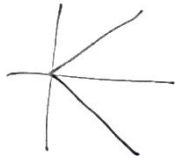
Non esistono $\max_{x \in \mathbb{R}} x^2$, $\min_{x \in [1, \infty)} \frac{1}{x}$.

Ricordiamo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Valgono $\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$. Infatti, vale per tutti $x \in X$, $f(x) \leq \sup_X f$, $g(x) \leq \sup_X g$

dunque $f(x) + g(x) \leq \sup_X f + \sup_X g$. Implica $\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$.
 Analogamente $\inf_X (f+g) \geq \inf_X f + \inf_X g$.

Esempio. $X = [0, 1]$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$. $\sup_{[0,1]} f = 1$, $\sup_{[0,1]} g = 0$.
 $\sup_{[0,1]} (f+g) = \sup_{[0,1]} 0 = 0 < 1 = \sup_X f + \sup_X g$.



Def. $f: X \rightarrow Y$ si dice iniettiva se, per tutti $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, allora $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si dice suriettiva se $\text{im } f = Y$. (Si dice biettiva se è iniettiva e suriettiva).

Esempi. $X = Y = \mathbb{R}$. $f(x) = x$ è iniettiva e suriettiva.

- $X = Y = \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ non è né iniettiva né suriettiva.
- $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ è iniettiva.



Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Un'equazione $y = f(x)$ può essere vero o falso, dipendentemente da x .
 Se è vero, x è detta una soluzione di $y = f(x)$.

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva. x sia una soluzione di $y = f(x)$.

Per iniettività, non ci sono altre soluzioni (l'unicità di x).

Sia $f: X \rightarrow Y$, suriettiva, $y \in Y$. Allora esiste $x \in X$, s.c. $y = f(x)$.

La suriettività garantisce l'esistenza di una soluzione x di $y = f(x)$.

Lemma Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora f è iniettiva.
 (de crescente).
 dim). Stano $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Allora vale $x_1 > x_2$ o $x_1 < x_2$.
 Nel primo caso, segue che $f(x_1) > f(x_2)$, dunque $f(x_1) \neq f(x_2)$.
 Nel secondo caso, segue che $f(x_1) < f(x_2)$, dunque $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempi.

- $f(x) = \sin x$. $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente, dunque iniettiva.
- $f(x) = \cos x$. $X = [0, \pi]$ è strettamente decrescente.
- $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è strettamente crescente.

Funzione composta

Siano X, Y, V, W insiem, e $f: X \rightarrow Y, g: V \rightarrow W$. Si dice la funzione composta $g \circ f$ la funzione col dominio $\{x \in X: f(x) \in V\}$ e $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Esempi. $X=Y=V=W, f(x) = x+1, g(x) = x^2$.

Si ha che $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$.

Si nota che $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$. Dunque $f \circ g \neq g \circ f$.

• $X = [0, \infty)$ $Y=V=W=\mathbb{R}$. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 3+x$.

$g \circ f(x) = 3 + \sqrt{x}$, $f \circ g(x) = \sqrt{3+x}$, definito su $\{x \in \mathbb{R}: 3+x \geq 0\} = [-3, \infty)$.

Se ci sono tre funzioni f, g, h , si può considerare $(f \circ g) \circ h$. In realtà, si ha $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g \circ h(x)) = f \circ (g \circ h)(x)$. Ossia, vale l'associatività $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Esempio. $\frac{1}{(x+1)^2-5} = f \circ g \circ h(x)$, dove $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x-5$, $h(x) = (x+1)^2$.

Il dominio è $\{x \in \mathbb{R}: (x+1)^2-5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x+1 \neq \pm\sqrt{5}\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq -1 \pm \sqrt{5}\}$.

Teo Siano f, g funzioni; $A \subset \text{dom}(g \circ f)$

(i) se f è crescente in A e g è crescente, allora $g \circ f$ è crescente.

(ii) crescente, decrescente, decrescente.

(iii) decrescente, crescente, decrescente.

(iv) decrescente, decrescente, crescente.

dim) (i). Siano $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$, e dunque $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, ossia, $g \circ f$ è decrescente.

Gli altri sono analoghi, anche per "strettamente".

Esempio $f(x) = (\sqrt{x+1} + 1)^3$ è strettamente crescente in $[-1, \infty)$.

Funzione inversa.

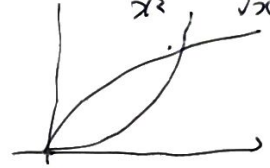
Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione iniettiva. Significa che, per $y \in \text{Im } f$, esiste uno solo $x \in X$ s.c. $y = f(x)$. Allora possiamo definire una funzione f^{-1} , detta l'inversa di f ,

col dominio $\text{im } f$ e codominio X , x.c. $f^{-1}(f(x)) = x$.

Esempi • $f(x) = x+1$. $f^{-1}(y) = y-1$. Infatti, $f^{-1} \circ f(x) = f(x)-1 = x+1-1 = x$.

• $X = [0, \infty)$. $f(x) = x^2$. $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Infatti, $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$.

f^{-1} inverte i ruoli di x e y . Il grafico di f^{-1} si ottiene riflettendo il grafico di $f(x)$ lungo $y=x$.



Se come f fa una corrispondenza univoca $f: x \mapsto f(x)$, f^{-1} è invertiva.

Teo Sia $f: X \rightarrow Y$ invertiva, $f^{-1}: \text{im } f \rightarrow X$. Allora $f \circ f^{-1}(y) = y$.

dim). Si ha $f^{-1}(f \circ f^{-1}(y)) = (f^{-1} \circ f) \circ f^{-1}(y) = f^{-1}(y)$. Per invertività, $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Per $B \subset Y$, si scrive $\{x \in X: f(x) \in B\} = f^{-1}(B) = \{x \in X: \text{esiste } y \in B \text{ x.c. } f^{-1}(y) = x\}$.

Si chiama il controimmagine di B . La definizione ha senso anche se f non è invertiva, e si usa la notazione $f^{-1}(B)$.

Funzioni trigonometriche inverse

Abbiamo visto che $\sin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \in [0, \pi]$, $\tan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sono invertive.

Le loro funzioni inverse si chiamano $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\arctan: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Funzioni potenza

Per $a \in (0, \infty)$, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ abbiamo definito $a^r = (a^{\frac{1}{n}})^m$. $a^{\frac{1}{nk}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}}$.

Vale cioè $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Infatti, $((a^{\frac{1}{n}})^m)^n = (a^{\frac{1}{n}})^{mn} = a^m$.

• Per $k \in \mathbb{N}$, $a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{1}{n}}^k$. Infatti, $(a^{\frac{1}{n}})^{kn} = ((a^{\frac{1}{n}})^k)^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^k$.

Siano $a, b \in (0, \infty)$, $r, s \in \mathbb{R}$.

1) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ 2) $(ab)^r = a^r b^r$ 3) $(a^r)^s = a^{rs}$ 4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

5) $a^r > 0$, $a^0 = 1$, $1^r = 1$. 6) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0 \\ < 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r < 0 \\ < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0 \\ a^r > 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r < 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a > 1 \text{ e } r < 0 \end{cases}$

7) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ > & \text{se } a < 1 \end{cases}$ 8) $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^r < b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r > b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$

9) Sia $a \neq 1$, $a^r = a^s$. Allora $r = s$.

Def Sia $a > 1$, $r \in (0, \infty)$. $r = p \cdot d_1 + \dots + d_n$. $a^r = \sup \{ a^{p \cdot d_1 + \dots + d_n} : n \in \mathbb{N} \}$.

$p \cdot d_1 + \dots + d_n \in \mathbb{Q}$, dunque lo sappiamo. L'insieme è limitato superiormente da a^{p+1} , un intero.

Se $0 < a < 1$ e $r > 0$, si definisce $a^r := \frac{1}{a^r}$. Se $r < 0$, $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Se $a = 1$, $a^r = 1$.

Si possono dimostrare 1) - 9) anche per $a \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{R}$.

Funzioni esponenziali

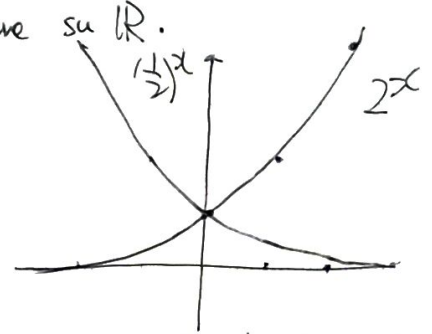
Siano $a > 0, r \in \mathbb{R}$ Abbiamo definito a^r .

Fissato a , possiamo vedere $x \mapsto f(x) = a^x$ come una funzione su \mathbb{R} .

Si dice una funzione esponenziale.

Si ha che

- $a^x > 0$ per tutti $x \in \mathbb{R}$.
- Se $a > 1$, $x \mapsto a^x$ è strettamente crescente.
- Se $a < 1$, $x \mapsto a^x$ è strettamente decrescente.
- Se $a = 1$, $x \mapsto 1^x = 1$ è costante.
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- Se $a > 1$, per qualunque $b > 0$ esiste x s.c. $a^x > b$.
 $a^x < b$. (per Archimede)



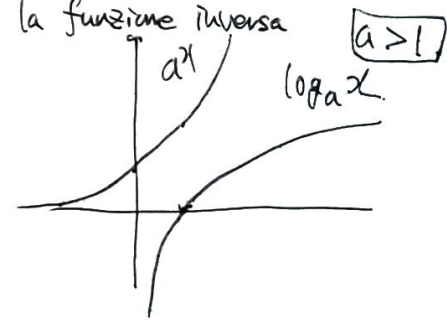
Teo L'immagine della funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ è $(0, \infty)$, per $a \neq 1$, (senza). Sia $Y \in (0, \infty)$. Poniamo $A = \{x \in \mathbb{R} : a^x < Y\}$.

A è limitato superiormente e non vuoto. (asi) Mettiamo $l = \sup A$.

Vediamo che $a^l = Y$. Dimostriamo per assurdo.

- Supponiamo $a^l < Y$. Per un piccolo $\epsilon > 0$, $a^\epsilon < \frac{Y - a^l}{a^l}$. così, $a^{l+\epsilon} < Y$, e $l+\epsilon \in A$, contraddice $l = \sup A$.
- Supponiamo $a^l > Y$. Per un piccolo $\epsilon > 0$, $a^\epsilon < \frac{a^l - Y}{a^l}$. così, $a^{l-\epsilon} > Y$, e $l-\epsilon$ sarebbe un maggiorante di A minore di l , contraddizione.

Def Si definisce, per $a > 1$ o $a < 1$, $y \mapsto \log_a y$ come la funzione inversa di $x \mapsto a^x$. Ossia, $\log_a a^x = x$.



Prop Siano $a, b, x, y \in (0, \infty)$, $a \neq 1 \neq b$. Allora,

- (i) $a^{\log_a x} = x$.
- (ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- (iii) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$.
- (iv) $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
- (v) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

dim) (ii) $\log_a(a^{\log_a x} a^{\log_a y}) = \log_a x + \log_a y$, per l'injectività della funzione inversa.

(iii) $a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a(xy)}$. per l'injectività di funzione esponenziale.

(iii) $a^{\log_a(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x} = \frac{1}{a^{\log_a x}} = a^{-\log_a x}$.

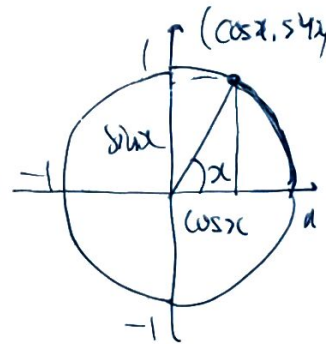
(iv) $a^{\log_a(x^y)} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x}$.

$$(v) b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x}$$

Esempi $\log_3 27 = 3$, $\log_{10} 0.0001 = -4$, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$.

Funzioni trigonometriche.

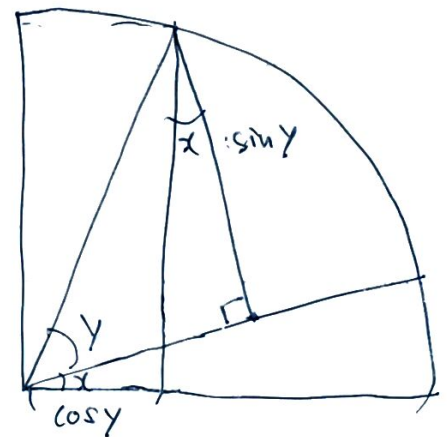
Le funzioni $\cos x$, $\sin x$ si definiscono usando il cerchio unitario, dove x è la lunghezza dell'arco, mentre $(\cos x, \sin x)$ è il punto definito dall'arco sul cerchio.



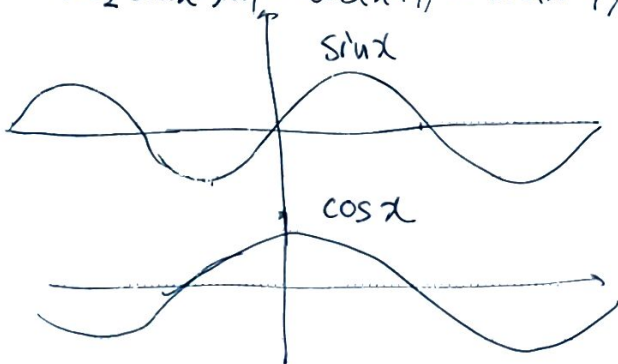
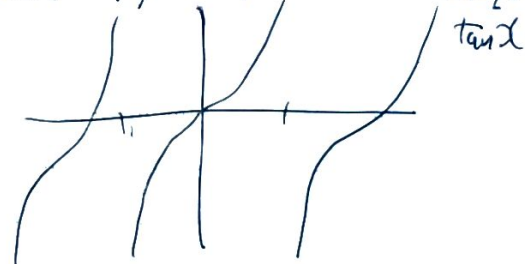
In questa maniera, $\cos x$, $\sin x$ si possono definire come funzioni su \mathbb{R} . $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Valgono, per $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.
- $|\cos x|^2 + |\sin x|^2 = 1$ (Pythagora). Si scrivono $\cos^2 x = (\cos x)^2$, $\sin^2 x = (\sin x)^2$.
- $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
- $2 \cos x \cdot \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$.
- $-2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$.



$$\sin(x+y) = \sin y \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos y$$



Esempi $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - \pi) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{5}{4}\pi) = 1$$

$$\sin(\frac{\pi}{8}) \quad \cos(\frac{\pi}{12})$$

Operazioni con funzioni

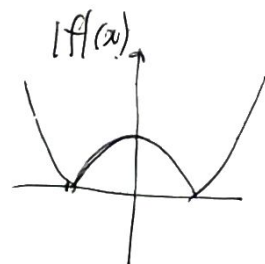
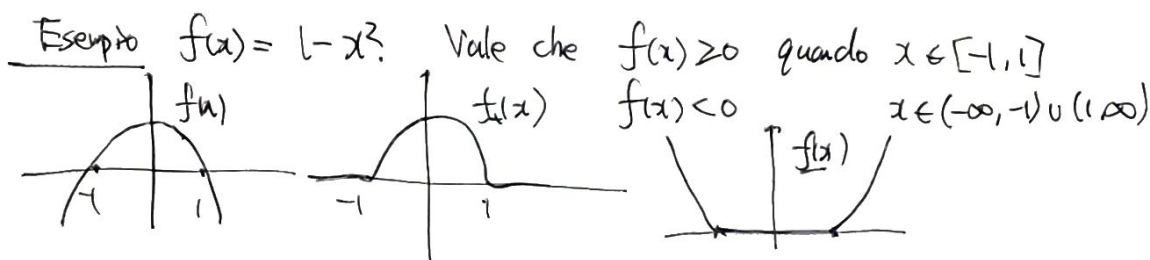
Def. Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si definiscono le funzioni su X :

• Il valore assoluto $|f|(x) := |f(x)|$

• La parte positiva $f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$ negativa $f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$

Per definizione, f_- è una funzione non negativa.

Valgono $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.



Ricordiamoci che, per una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, il grafico è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.

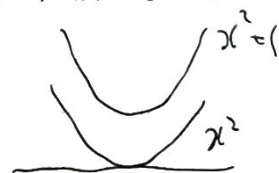
Traslazioni

Sia $A \in \mathbb{R}$. Consideriamo $g(x) := f(x) + A$ definita su X . $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) + A\}$

Supponiamo che (x_0, y_0) si trova sul grafico di $f(x)$, ossia, $y_0 = f(x_0)$.

Allora $(x_0, y_0 + A)$ si trova sul grafico di $g(x)$. Infatti, $y_0 + A = f(x_0) + A = g(x_0)$.

Dunque il grafico di g è quello di f "alzato" per A .



Sia $B \in \mathbb{R}$. Consideriamo $g(x) := f(x - B)$ definita su

$X + B := \{x + B : x \in X\} = \{z \in \mathbb{R} : \text{esiste } x \in X \text{ s.c. } z = x + B\}$.

Supponiamo che (x_0, y_0) è sul grafico di f . $y_0 = f(x_0)$

Allora $(x_0 + B, y_0)$ è sul grafico di g . Infatti,

$$g(x_0 + B) = f(x_0 + B - B) = f(x_0) = y_0.$$

Dunque il grafico di g è quello di f "spostato" per B orizzontalmente.



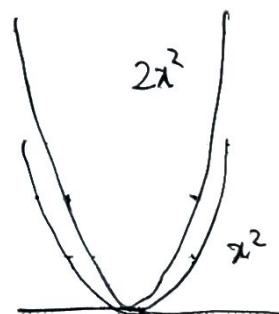
Riscaldamento

Sia $A \in \mathbb{R}$ Consideriamo $g(x) := A f(x)$ definito su X .

Supponiamo che (x_0, y_0) è sul grafico di f . $y_0 = f(x_0)$.

Allora $(x_0, A y_0)$ è sul grafico di g . $A y_0 = A f(x_0) = g(x_0)$

Dunque il grafico di g è quello di f "riscaldato" verticalmente per A .

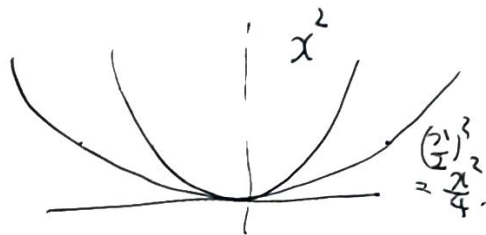


Sia $A \neq 0$. Consideriamo $g(x) := f\left(\frac{x}{A}\right)$ definito su $\{Ax = x \in X\} = \{z \in \mathbb{R} : \text{esiste } x \in X \text{ s.c. } z = Ax\}$.

Supponiamo $y_0 = f(x_0)$. Allora (Ax_0, y_0) è sul grafico di g .

Infatti $y_0 = f(x_0) = f\left(\frac{Ax_0}{A}\right) = g(Ax_0)$.

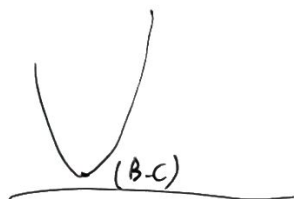
Dunque il grafico di g è quello di f "riscalato" orizzontalmente per A .



Si nota che, se $A < 0$, allora questa operazione dà il riscalamento seguito dalla riflessione.

Le operazioni si possono comporre. Se $f(x) = A(x-B)^2 + C$, allora è ottenuta dal riscalamento per A seguito dalla traslazione (B, C) .

Dunque il grafico rimane una parabola.



Numeri complessi

Abbiamo visto che, se $x \in \mathbb{R}$, non vale mai $x^2 = -1$, perché $x^2 \geq 0$.

È possibile considerare un sistema di numeri esteso in cui esiste un i^2 s.c. $i^2 = -1$.

Formalmente, si considerano i simboli $x + iy$, dove $x, y \in \mathbb{R}$, e sono detti numeri complessi. Ossia, per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si associa $x + iy$, e viceversa.

Sia $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$. Si scrive $z = x + iy$.

Definiamo le seguenti operazioni.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (\text{addizione}).$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (\text{moltiplicazione}).$$

Per $z = x + iy \in \mathbb{C}$, x si chiama la parte reale, y la parte immaginaria.

Si dice che due $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ sono uguali se e solo se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. In questo modo, un punto $z = x + iy \in \mathbb{C}$ si identifica con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, geometricamente. \mathbb{C} è detto il piano complesso.

Per $x \in \mathbb{R}$, si identifica con $x + i0 \in \mathbb{C}$. In questo modo, possiamo dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. \mathbb{R} in \mathbb{C} è detto l'asse reale. Mentre $\{0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$ è detto l'asse immaginario.

Si considera $0 + i1$. si ha $(0 + i1)^2 = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$. In questo senso, $i^2 = -1$.

Abbiamo introdotto numeri complessi $x+iy \in \mathbb{C}$ con $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$,

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

(se $r \in \mathbb{R}$, $r+i0 = r$ e $r \cdot (x+iy) = (r+i0)(x+iy) = rx + iy$).

Teo Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 (=0+i0)$. Allora con $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$, $z z^{-1} = (1+i0)$ (dim) e $z \neq 0$, allora o $x \neq 0$ o $y \neq 0$, dunque $x^2+y^2 \neq 0$.

$$\text{Si ha } z z^{-1} = (x+iy) \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{x^2+y^2} (x^2 - (y(-y)) + i(x(-y) - x y)) = 1 + i0 = 1.$$

Con le operazioni, $+$, \cdot , \mathbb{C} soddisfa le proprietà (1)-(9), che rende \mathbb{C} un "campo". $\bar{z} = -x + i(-y)$
 \mathbb{Q}, \mathbb{R} sono campi. Con (10)-(15), \mathbb{Q}, \mathbb{R} sono "campi ordinati".

Per l'esistenza di sup/inf, \mathbb{R} è un "campo ordinato completo".

Per $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $\bar{z} := x - iy (= x + i(-y))$ si dice il complesso coniugato di z .

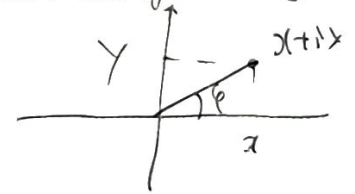
$z = x+iy \in \mathbb{C}$ si può rappresentare sul piano.

con $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$, l'angolo φ tra il segmento $0-z$ e l'asse reale, si può scrivere $\bar{z} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

(φ si può prendere anche $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Questa si dice rappresentazione trigonometrica di z .

$|z|$ è detto il modulo di z , φ l'argomento di z . $\varphi = \arg z$.



Esempio Sia $z = 1-i$. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Infatti, } z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 1 - i.$$

Teo Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Se $\arg z_1 \neq 0 \neq \arg z_2$, allora $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

(dim). Se almeno uno di z_1, z_2 è $0 (=0+i0)$, $z_1 z_2 = 0$.

Supponiamo che $\varphi_1 = \arg z_1 \neq 0 \neq \arg z_2 = \varphi_2$. Si possono scrivere $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,

$z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ Allora

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \left((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \right) \\ &= |z_1| |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right). \end{aligned}$$

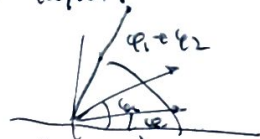
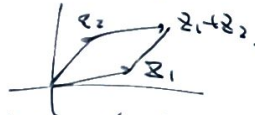
dunque $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

In particolare, se $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, allora $z^2 = |z|^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))$.
 $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. "La formula di De Moivre."

Per $z = x + iy$, si può definire $e^z := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.

Allora si può verificare che $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ cf. Serie di Taylor.

Somma $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.



prodotto $|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Radici complesse

Teorema Sia $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

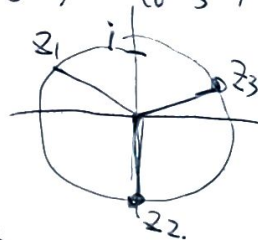
(1) Se $w = 0$, l'equazione $z^n = w$ ha una sola soluzione $z = 0$. $k = 1, 2, \dots, n$.

(2) Se $w \neq 0$, le soluzioni $z_k = |w|^{1/n} (\cos(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}))$

dim) (1) è chiaro. (2) se $w \neq 0$, $w = |w|(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$ e

si ha $(z_k)^n = |w|(\cos(\arg w + 2\pi k) + i \sin(\arg w + 2\pi k)) = |w|(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$.

Esempio $w = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$. Soluzioni di $z^3 = w$. $z = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})$, $k = 1, 2, 3$



Siano $a, b \in \mathbb{C}$, e consideriamo l'equazione

$z^2 + az + b = 0$. Si può risolvere:

$$z^2 + az + b = (z + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0 \iff (z + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

Possiamo prendere la radice quadrata di $(\frac{a^2}{4} - b)$ in \mathbb{C} , scritto $\pm (\frac{a^2}{4} - b)^{\frac{1}{2}}$

$$z = -\frac{a}{2} \pm (\frac{a^2}{4} - b)^{\frac{1}{2}} = z_{\pm} \quad z^2 + az + b = (z - z_+) (z - z_-)$$

Teo. fondamentale dell'algebra.

Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Allora si può scrivere $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = (z - z_1) \dots (z - z_n)$, dove $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

$f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ è detta la funzione polinomiale.

$f(z) = \frac{a_0 + \dots + a_n z^n}{b_0 + \dots + b_m z^m}$ è detta una funzione razionale.

Anche se a_j, b_k sono reali, possiamo analizzare tali funzioni usando \mathbb{C} .